ソフトコンピューティング 講義資料（II）

佐賀 聡人

緒言

前回の報告書（図形処理及び画像処理におけるファジィ理論の応用と研究 －基礎調査報告書－）[1]）においては，ファジィ理論の基礎から主にタイプ 1 ファジィ集合を用いた推論までについて報告し，ファジィ理論についてある程度見通しが利くようになった．しかし，タイプ 1 ファジィ集合による推論は制御問題には向くが，図形や画像の分野での応用で必要となってくる意思決定や認識といった高度な推論を必要とする問題には不十分な技術であった．

そこで，本報告書では，より高度な推論を可能とすると期待されるタイプ 2 ファジィ集合に焦点をあてて，この基本的性質を考察し，これを実際に応用に用いるためにどのようなアプローチを行うのが適当かについて検討を行う．

本報告書は 6 章よりなる．第 1 章から第 3 章までは，高度な推論を行うための基礎となる，ファジィ命題に対する種々の限定法に関して考察する．この考察により，タイプ 2 ファジィ集合の必要性が明らかになるが，第 4 章での種々の理論体系の数学的構造に関する基本的考察をもとに，第 5 章，第 6 章でさらにタイプ 2 ファジィ集合をどのように取り扱えば応用上有効に取り扱えるかについて考察する．ここで各章の内容を以下に挙げる．

第 1 章 ファジィ命題の逆真理値限定

前報告書で紹介した言語的真理値限定を整理し，この逆の過程として得られる，逆真理値限定法について概説する．また例を挙げて，これが本質的に認識問題のための手法であることを示す．

第 2 章 ファジィ命題可能性限定

「$(X \text{ is } A)$ が可能である」というような可能性にかかわる言葉で限定された場合にこの標準形がどう求められるかという可能性限定法について概説する．また，ここで，可能性限定によって自然に導入される部分的無知の概念についても解説する．

第 3 章 ファジィ命題の確率限定

「$(A \text{ is } B)$ がほとんどの場合に真である」というような形の確率限定問題の真理値の求め方について実例をまじえて概説する．

第 4 章 ファジィ論理と種々の論理体系

第 5 章，第 6 章でタイプ 2 ファジィ集合に関して，もう少し深い考察をするための準備として，古典論理，直感主義論理，様相論理の代数的な構造について整理し，またファジィ論理とのかかわりあいについて考察する．

第 5 章 可能性，必然性と区間真理値

タイプ 2 ファジィ集合の言語的真理値と可能性，必然性の関係について考察し，さらに，可能性と必然性から求められる区間真理値が言語的真理値をどのように近似できるかについて考察する．

第 6 章 ファジィ・インターバル論理

区間真理値の一般化として最近提案されたファジィ・インターバル論理について概説および考察をし，これが，タイプ 2 ファジィ集合の言語的真理値の近似モデルとしてよい性質をもっていることについて述べる．

目 次

第1章　ファジィ命題の逆真理値限定

本章では，意思決定，認識などの（制御に較べて）高級な推論を伴う場合に重要な技術となる「ファジィ命題の逆真理値限定」の手法について説明する．これは既に報告した「ファジィ命題の（言語的）真理値限定」のちょうど，逆の過程に相当するものであり，例えば「彼は若い」という事実（ファジィ命題）から「彼は20才くらいである」という事柄（これもファジィ命題）の真偽がどのように推論されるかをタイプ2のファジィ真理値を用いて求める手法である．

1.1　真理値限定と真理値限定命題

ここでは,「逆真理値限定」について説明する準備として，前報告書 [1] で説明した「言語的真理値限定」について概説する．

言語的真理値限定命題とは,「X is A」というファジィ命題に対して，ある言語的真理値 τ（τ は真理値空間 $[0,1]$ を台集合とするファジィ数）による限定を行い,

$$(X \text{ is } A) \text{ is } \tau \tag{1.1}$$

なる新たなファジィ命題をつくったときに，この命題の真理値が X に関してどのように変化するかを調べるものであった．換言すれば，これは，式 (1.1) のファジィ命題の標準形

$$(X \text{ is } B) \tag{1.2}$$

を求めることであり，具体的には，すべての $X = u$（$\in U$，U は変数 X の定義域）において式 (1.1) と式 (1.2) の真理値が一致するようにファジィ集合 B のメンバシップ関数 $\mu_B(X)$ の形を求めることである．

さて，ここで，式 (1.1) の言語的真理値限定ファジィ命題は次のように解釈される．ファジィ命題「X is A」に対して，X の値が一つ具体的に与えられれば,「X is A」自身は区間 $[0,1]$ のある実数を真理値として持つ．これはつまり,「「X is A」自体が区間 $[0,1]$ を定義域として持つ実数変数に他ならないことを示している（一般に論理学では，命題と真理値は全く同一視されることに注意.）．そこで，実数変数 Y を導入して,

$$(X \text{ is } A) = Y \tag{1.3}$$

とおけば，式 (1.1) は,

$$Y \text{ is } \tau \tag{1.4}$$

と標準形になっているから，このファジィ命題の真理値は，Y を変数として,

$$\mu_\tau(Y) \tag{1.5}$$

と得られることがわかる．ところで，変数 Y（つまり「X is A」の真理値，あるいは「X is A」そのものと考えてもよい.）は X の値によって

$$Y = \mu_A(u) \tag{1.6}$$

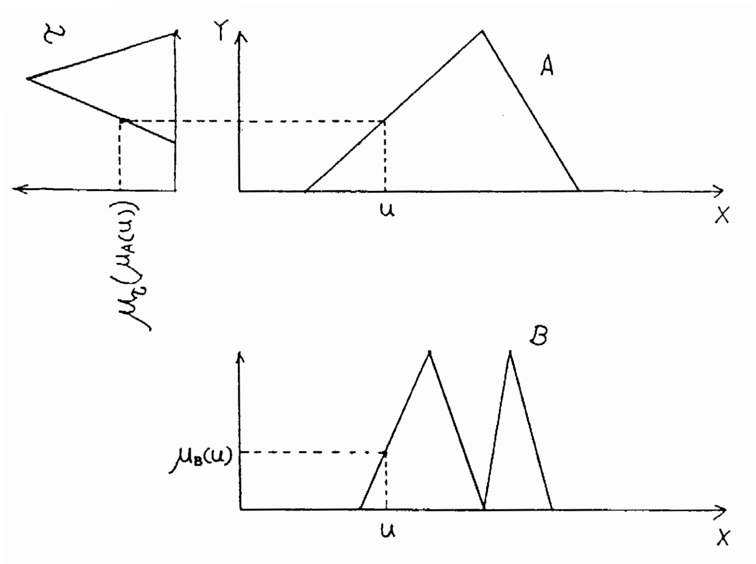

図 1.1　言語的真理値限定の例

と得られるから，式 (1.6) を式 (1.5) に代入すれば，

$$\mu_\tau(\mu_A(X)) \tag{1.7}$$

が得られ，これが，式 (1.4) のファジィ命題，さらには，式 (1.1) のファジィ命題の真理値を与えることになる．ここで，式 (1.7) は結果的には X の関数となっているから，これを式 (1.2) のファジィ集合 B のメンバシップ関数として，

$$\mu_B(X) = \mu_\tau(\mu_A(X)) \tag{1.8}$$

と採用することができ，このとき，式 (1.1) と式 (1.2) の命題はすべての $X = u(\in U)$ において同じ真理値を持つことになり，同一の命題となる（一般に論理学において，命題とは真理値そのものであり，その中身がどのような形で表現されていようとも，考えているすべての状況下で，真理値が一致しているようなふたつの命題は同一のものとみなされる．）．

以上のように，式 (1.1) のような形の言語的真理値限定ファジィ命題が与えられたときには，式 (1.8) のようなメンバシップ関数をもつファジィ集合 B を求めることにより，与えられた命題と全く同一の命題を式 (1.2) のような標準形で求めることができ，この過程が「真理値限定」と呼ばれる．

例えば．図 1.1 の上図に示すようなファジィ集合 A と言語的真理値 τ のメンバシップ関数により式 (1.1) の真理値限定ファジィ命題が与えられているとすれば，式 (1.8) により，図 1.1 の下図のようなファジィ集合 B のメンバシップ関数が得られ，このとき，式 (1.2) のファジィ標準形命題は，与えられた真理値限定ファジィ命題と同一となる．試みに図のように適当に $X = u$ とおいてみても，式 (1.1) の真理値

$$\mu_\tau(\mu_A(u))$$

と式 (1.2) の命題の真理値

$$\mu_B(u)$$

が一致するようになっているのがわかる．

1.2　逆真理値限定

逆真理値限定は，その名が示す通り，真理値限定の逆の過程である．真理値限定では，式 (1.1) の A と τ がわかっているときに，B を求める問題であった．これに対して，逆真理値限定とは，式

(1.2) の B と式 (1.1) の A がわかっているときに，式 (1.2) の命題と式 (1.1) の命題が同一の命題となるように，ファジィ真理値 τ を（即ち，τ のメンバシップ関数を）求める過程である．

ここで，まず簡単な場合，つまり，式 (1.1) のメンバシップ関数 $\mu_A(X)$ が 1 対 1 の写像になっている場合を考える．この場合には，$\mu_A(X)$ の逆関数 ${\mu_A}^{-1}(X)$ が存在して，

$$Y = \mu_A(X) \tag{1.9}$$

とおけば，

$$X = {\mu_A}^{-1}(Y) \tag{1.10}$$

となる．ここで，式 (1.1) と式 (1.2) の命題が同値となる必要十分条件は式 (1.8) が成立することであるから，式 (1.9) と式 (1.10) を式 (1.8) に代入すれば，

$$\mu_B({\mu_A}^{-1}(Y)) = \mu_\tau(Y) \tag{1.11}$$

となり，結局 τ のメンバシップ関数は求められる．

しかし一般には，A のメンバシップ関数 $\mu_A(X)$ は n 対 1 の写像であり，逆関数が定まらない．即ち，

$$Y = \mu_A(X)$$

とおいたとき，これを満たす X は n 個存在する．したがって，同値の必要十分条件である式 (1.8) にこれを代入しても，

$$\mu_\tau(Y) = \mu_B(X)$$

は一つの値に定まらない．そこでこの場合は，それら上限をとって τ を定めることにしている．つまり，

$$\mu_\tau(Y) = \sup_{Y=\mu_A(X)} \{\mu_B(X)\} \tag{1.12}$$

と求められる．

図 1.2 に逆真理値限定の例を示す．ここで，例えば，τ の $Y = p$ のときのグレード，即ち $\mu_\tau(p)$ を求めるとする．このとき，

$$Y = p = \mu_A(X)$$

となる X は，$X = u_1$ と $X = u_2$ のふたつがあるから，

$$\mu_\tau(p) = \sup\{\mu_B(u_1), \mu_B(u_2)\}$$

となり，結局，

$$\mu_\tau(p) = \mu_B(u_2)$$

が得られる．

以上のように，式 (1.12) に従えば，A が n 対 1 のメンバシップ関数を持つ場合にも，式 (1.1) の限定真理値 τ のメンバシップ関数を求めることが一応可能となる．しかし，ここで求められた真理値限定命題（式 (1.8)）が成立しているわけでなく，

$$\mu_B(X) \le \mu_\tau(\mu_A(X)) \tag{1.13}$$

が成立しているにすぎないことから直ちにわかる．試みに，図 1.2 の場合，式 (1.12) で τ を求めて，式 (1.1) の形の真理値限定命題をつくり，これに対してさらに，真理値限定を行って，標準形命題に戻してやると，図 1.2 中の B'（一点鎖線で示す二山のメンバシップ関数）が得られて，

$$X \text{ is } B' \tag{1.14}$$

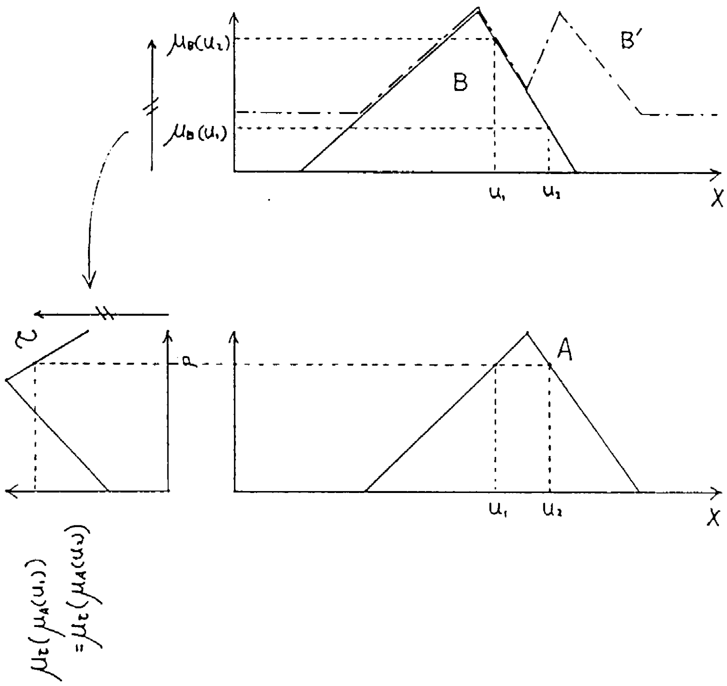

図 1.2　　逆真理値限定の例

が得られてしまう．これが，もともとの命題

$$X \text{ is } B \tag{1.15}$$

と同値でないのは明らかである．ただし，式 (1.13) から，

$$B \subseteq B' \tag{1.16}$$

が成立しているから，継承原理に従えば，式 (1.15) と式 (1.16) から式 (1.14) が推論されることはいえる．

このように，一般に逆真理値限定によって得られる．真理値限定命題は，もとの命題とは同値にはならず，もとの命題から継承原理によって推論されかつ真理値限定命題で表されうる命題のうちでもっとも小さいものを求めていることになる．

1.3　逆真理値限定の用途

逆真理値限定は，特にファジィ理論を認識関係に応用する場合には非常に重要な考え方である．次のような例を考えてみればよい．いま色彩を認識したいとする．このとき，まず各色の概念を定義する必要がある．例えば,「赤」という概念を定義するのに，変数 X（X は色相を表す変数とする.）と適当なファジィ集合 A（A は色相の全体を台集合とするファジィ集合で,「赤」の概念をうまく包含するように定める.）を用いる．すると,「ある色が赤である.」という命題は,「X is A」というファジィ命題で表現できるであろう．ここで，実際に，あるサンプル（例えばピンクっぽい色だとする.）をもってきて，この色を認識したいとする．このとき，そのサンプルの色相の分布を調べれば，そのサンプルの色に関する観測事実もまた，適当なファジィ集合 B（B も色相の全体を台集合とするファジィ集合で，観測事実をうまく包含するように定める.）を用いて「X is B」なるファジィ命題で表現できるであろう．さてここで，このピンクっぽいサンプルの色が「赤である」とどの程度いえるか，つまり，このサンプルの色を「赤」と認識することがどの程度正しいと

いえるかという問題を考える．するとこれは,「X is B」なる観測事実から「X is A」であるとどの程度までいえるかという問題であり，結局,「X is B」なる命題から,「X is A」がどの程度「真」かを限定する限定（ファジィ）真理値を求める問題に帰着され，逆真理値限定の手法に他ならないことがわかる．このように，逆真理値限定は，観測されたサンプルを予め定義された概念として認識することがどの程度正しいものかを求める手段を提供している．

第2章　ファジィ命題の可能性限定

1.1 節で概観した真理値限定命題は，ある標準形の命題の言語的な真理値がどの程度あるかを限定した命題であった．ここでは，ある標準形の命題に対してそれが「可能である」とか「不可能である」とか「必然である」とか「偶然である」というような可能性に関する言葉で限定（修飾）された命題を可能性限定命題と呼び，この可能性限定命題と同値となる標準形命題がどのように求められるかという可能性限定の問題について説明する．

2.1　可能性限定命題とその標準形

1.1 節で説明した，真理値限定命題とは,「X is A」という標準形命題をファジィ真理値 τ で限定（修飾）した,

$$(X \text{ is } A) \text{ is } \tau$$

という形の命題であった．具体的な例をあげると,「彼の年齢が若いということは，ほぼ真である」というような命題が真理値限定命題であり，これから「彼の年齢は大体これこれである」という標準形の同値命題を求める操作が真理値限定であった．

ここで，取り扱う可能性限定命題とは,「X is A」という標準形命題を可能性に関する性質を限定する言葉:「可能 (possible)」,「不可能 (impossible)」,「必然 (necessary)」および「偶然 (contingent)」で限定（修飾）した,

$$(X \text{ is } A) \text{ is possible} \tag{2.1}$$

$$(X \text{ is } A) \text{ is impossible} \tag{2.2}$$

$$(X \text{ is } A) \text{ is necessary} \tag{2.3}$$

$$(X \text{ is } A) \text{ is contingent} \tag{2.4}$$

という形の命題であり，これらの可能性限定命題と同値な標準形命題を求める操作を可能性限定とよぶ．例えば,「彼の年齢が若いということは可能である」というのが可能性限定命題であり，これから,「彼の年齢は大体これこれである」という標準形の同値命題を求める操作が可能性限定である．

通常，可能性限定命題というと，式 (2.1)，式 (2.2) のような「可能性」および「不可能性」によって限定された命題を指す場合が多いが，ここでは,「可能性」,「不可能性」とともに「必然性」および「偶然性」についても統一的に取り扱うものとする．これは，これら 4 つの概念が様相概念として密接に関連しあっているためである（様相概念に関する議論については，第 4 章も参照されたい.）．

ここではまず議論から先に示す．例えばファジィ集合 A のメンバシップ関数として，図 2.1 に示すものを仮定すると，式 (2.1) から式 (2.4) までの可能性限定命題は，それぞれ図 2.2 から図 2.5 までに示すファジィ集合を用いて,

$$X \text{ is } A_p \tag{2.5}$$

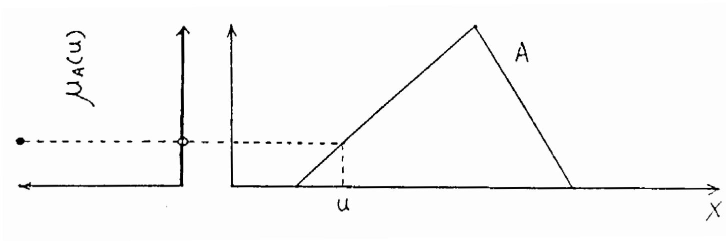

図 2.1　(X is A) の例

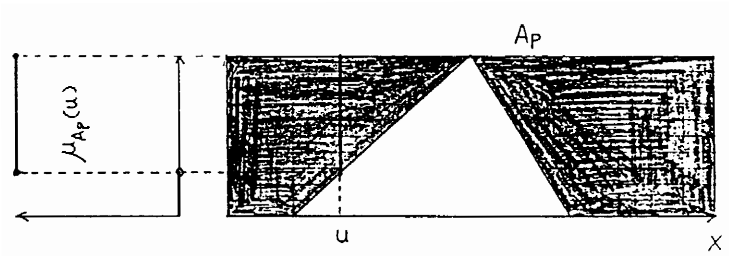

図 2.2　((X is A) is possible) の例

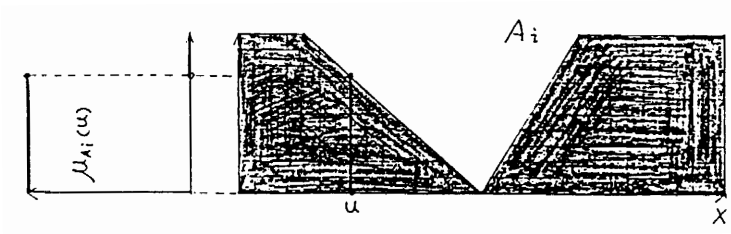

図 2.3　((X is A) is impossible) の例

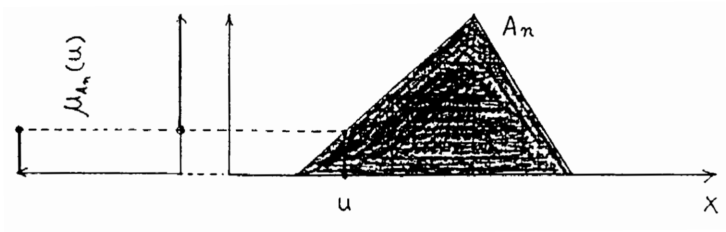

図 2.4　((X is A) is necessary) の例

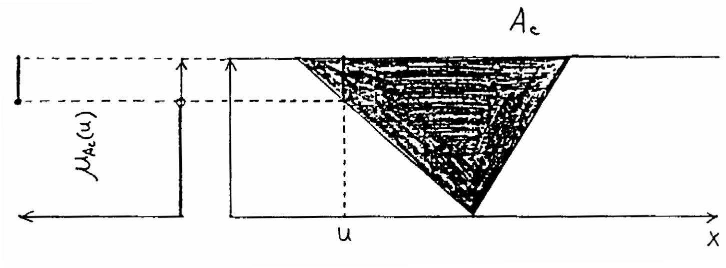

図 2.5　((X is A) is contingent) の例

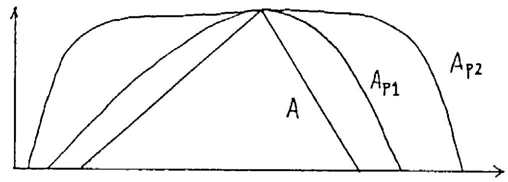

図 2.6　ファジィ集合 A を包含するファジィ集合の例

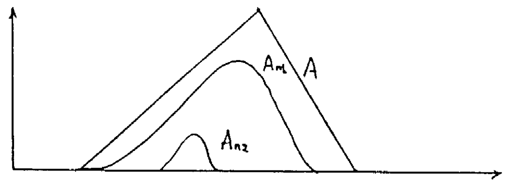

図 2.7　ファジィ集合 A に包含されるファジィ集合の例

$$X \text{ is } A_i \tag{2.6}$$

$$X \text{ is } A_n \tag{2.7}$$

$$X \text{ is } A_c \tag{2.8}$$

なる標準形命題と同値となる．ここで，A がタイプ 1 のファジィ集合であるにもかかわらず，可能性限定命題の標準形を与えるファジィ集合 $A_p, A_i A_n$ 及び A_c は共に，メンバシップ関数のグレードとして区間値をとる，いわゆるタイプ 2 ファジィ集合（の特別な場合）になっていることに注意する．図の例で，例えば，$X = u$ のときの A のグレードは $\mu_A(u)$ であるが，このときの A_p, A_i, A_n 及び A_c のグレードはそれぞれ，$[\mu_A(u), 1], [0, 1 - \mu_A(u)], [0, \mu_A(u)]$ および $[1 - \mu_A(u), 1]$ なる区間値である．

このような標準形が導かれる理由の一つの解釈の仕方としては，次のように考えることができよう．

まず式 (2.1) であるが，これは,「$(X \text{ is } A)$ ということが可能である」ということを表している．ここで，図 2.6 の A_{p1} や A_{p2} のような A を包含するようなファジィ集合を作って,「X is A_{p1}」や「X is A_{p2}」なる標準形命題を考えてみる．すると「X is A」ということができれば，これらの標準形命題が成立することが継承原理より容易にわかる．これは，A を包含するすべてのファジィ集合についていえることであるから，結局「X is A」ということができるということは,（即ち「$(X$ is $A)$ ということが可能」ということは），A を包含するような任意のファジィ集合 A_{px} に対して「X is A_{px}」が成立することに他ならない．そこでこのような A_{px} をすべて重ね合わせると，即ちこれが区間値グレードを持つタイプ 2 ファジィ集合 A_p となり，式 (2.5) が導かれることになる．

次に式 (2.2) は「$(X$ is $A)$ ということが不可能である」ということを表しているのだが，これは,「$(X$ is $A)$ ということが可能である」ことを否定していることに他ならない．これは，式 (2.1) の命題の否定であり，したがって当然，式 (2.5) の命題の否定である．ここで，式 (2.5) の命題の否定命題は，A_p の補集合 $\mathrm{not}(A_p)$ を用いて，

$$X \text{ is } \mathrm{not}(A_p)$$

と表されるが，ここで，

$$A_i = \mathrm{not}(A_p)$$

となっているから（タイプ 2 ファジィ集合の否定演算子 $n(x) = 1 - x$ に基づく補集合計算から明らか），結局，式 (2.6) が導出される．

さて，式 (2.3) は,「$(X \text{ is } A)$ ということが必然である」こと，あるいは同じことだが「$(X \text{ is } A)$ と必然的にいえる」ということを意味している．ここで，図 2.7 の A_{p1} や A_{p2} のような A に包含されるようなファジィ集合を作って,「X is A_{p1}」や「X is A_{p2}」なる標準形命題を考える．するとこれらの命題の成立から「X is A」の成立が必然的にいえることが，継承原理から明らかである．同様のことは，A に包含されるすべてのファジィ集合についていえるから，結局「X is A」が必然的にいえるということは，A に包含される任意のファジィ集合 A_{nx} に対して「X is A_{ix}」が成立することである．したがってこのようなすべての A_{nx} を重ね合わせると，区間値グレードを持つタイプ 2 ファジィ集合 A_n が得られ，式 (2.7) が導かれることになる．

最後の式 (2.4) は「$(X \text{ is } A)$ ということは偶然である」ことを示している．これは，内容的に「$(X \text{ is } A)$ ということは必然である（式 (2.7)）」ことの否定である．したがって，式 (2.6) の導出と同様の議論により，A_n の補集合から式 (2.8) が導出される．

2.2　様相論理による可能性限定の解釈

前節では，可能性限定命題の標準形を天下り式に提示し，その意味をいささか強引に解釈した．ここでは，直観主義論理およびそれに様相性を取り入れた論理体系である様相論理の立場に立てば，可能性限定命題の標準形がもっと形式的にすっきり導出されることがわかったので，これについて説明する．ただしここで，ファジィ命題を他の論理体系で議論するための準備は第 4 章で述べるのでこれを参照されたい．

ここで用いるのは直観主義における「含意（→：ならば）の定義」と様相論理における「可能性の公理」および「必然性の公理」である．

p, q を命題とすると，直観主義論理における含意命題 $(p \to q)$ は,

$$\begin{aligned} p \to q &= \sup\{r \mid p \wedge r \leq q\} \\ &= \begin{cases} 1 & (p \leq q) \\ q & (p > q) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.9}$$

と定義される．

また様相命題である「p は可能である」や「p は必然である」という命題はそれぞれ，可能性を表す論理記号 $\Diamond$ と必然性を表す論理記号 $\Box$ を用いて $\Diamond p$ および $\Box p$ と表されるが，ここで，様相論理の立場では，最も基本的な公理として次の二つの公理を少なくとも認めている．即ち,

$$p \to \Diamond p \equiv 1 \tag{2.10}$$

$$\Box p \to p \equiv 1 \tag{2.11}$$

である．ここで式 (2.10) は「可能性の公理」と呼ばれ,「p であれば p は可能である」ことが恒真であることを意味し，また式 (2.11) は「必然性の公理」と呼ばれ,「p が必然であれば p である」ことを意味する．

ここで，式 (2.9) の p, q を $p, \Diamond p$ に置き換えれば,

$$p \to \Diamond p \equiv \begin{cases} 1 & (p \leq \Diamond p) \\ \Diamond p & (p > \Diamond p) \end{cases} \tag{2.12}$$

が得られるが，これを式 (2.10) の可能性の公理と比較すると,

$$p \leq \Diamond p \tag{2.13}$$

となる．

また一方，式 (2.9) の p, q を $\Diamond p, p$ に置き換えれば，

$$\Box p \to p \equiv \begin{cases} 1 & (\Box p \leq p) \\ p & (\Box p > p) \end{cases} \tag{2.14}$$

が得られるが，これを式 (2.11) の必然性の公理と比較すると，

$$\Box p \leq p \tag{2.15}$$

となる．

さて，ここで，式 (2.1) のなかの「X is A」を

$$(X \text{ is } A) = \mu_A(X) = p \tag{2.16}$$

とおけば，式 (2.1) 自身は（あるいはこれと同値な式 (2.5) は），

$$((X \text{ is } A) \text{ is possible}) = \mu_{A_p}(X) = \Diamond p \tag{2.17}$$

となる．したがって，式 (2.16) と式 (2.17) を式 (2.13) に代入すれば，

$$\mu_A(X) \leq \mu_{A_p}(X) \tag{2.18}$$

なる条件が得られ，A_p のメンバシップ関数が図 2.2 のようになることがわかる．

一方，式 (2.3) は（あるいはこれと同値な式 (2.7) は），

$$((X \text{ is } A) \text{ is necessary}) = \mu_{A_n}(X) = \Box p \tag{2.19}$$

となるが，ここで，式 (2.19) と式 (2.16) を式 (2.15) に代入すれば，

$$\mu_{A_n}(X) \leq \mu_A(X) \tag{2.20}$$

なる条件が得られ，A_n のメンバシップ関数が図 2.4 のようになることがわかる．

不可能性および偶然性については，それぞれ，可能性および必然性の否定概念であることは容易にわかるので，前節の議論で十分であろう．

2.3　可能性限定命題と部分的無知

本節では，可能性限定命題の標準形に現れるタイプ 2 ファジィ集合がどのような意味をもつのかということについて考察する．

具体的な例として，「若い」という概念を表すファジィ集合 Young が図 2.8 の上段のようなメンバシップ関数をもつものとする．すると「年齢が若い」という命題は，年齢を表す変数 Age を用いて，

$$(\text{Age is Young}) \tag{2.21}$$

と表され，また，「年齢が若いということは可能である」という可能性限定命題は，前節までの議論により，図 2.8 の下段の Young-p なるタイプ 2 ファジィ集合と年齢を表す変数 Age を用いて，

$$((\text{Age is Young}) \text{ is possible}) = (\text{Age is Young-}p) \tag{2.22}$$

と表される．ここで，Age が 10 才，30 才，70 才のときに着目してみると，式 (2.21) および式 (2.22) の真理値は下のようになっている．

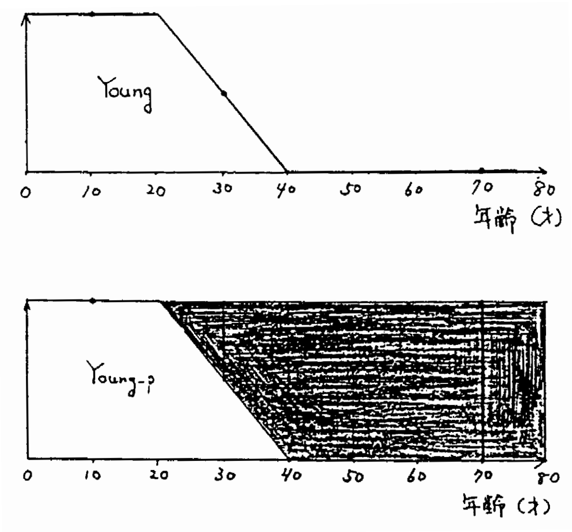

図 2.8　可能性限定命題の例

	10 才	30 才	70 才
Age is Young	1	0.5	0
Age is Young-p	1	$[0.5, 1]$	$[0, 1]$

これをみると，年齢が 10 才の場合は，命題「10 才は若い」も命題「10 才は若いということはかのうである」も共に文句なく真である（1 である）ことがわかる．しかし，30 才の場合，命題「30 才は若い」は真理値が 0.5 と確定しているのに対して，命題「30 才は若いということは可能である」の真理値は 0.5 から 1 の範囲内にあることはわかるが実際にどの値かはわからない（部分的無知）ことを示している．さらに，年齢が 70 才の場合を考えると，命題「70 才は若い」は真理値が 0（つまり文句なく偽）であるのに対して命題「70 才は若いということは可能である」は真理値が 0 から 1 の範囲にあることしかわからない．つまり，後者の場合，真理値が何になるのか全くわからない（無知）ことを示している．

可能性限定命題は一般に，区間真理値を誘導するが，ここで，区間真理値はその区間内に真理値があることはわかる（部分的な知）がその中のどれか一つに真理値を特定できない（部分的無知）ということを表しているものと解釈される．つまり区間真理値は部分的無知を表現していると考えられ，その中でも区間真理値 $[0, 1]$ は完全に無知であることを表す．これに対して 0.5 といった確定した真理値は，真理値が「完全な真」と「完全な偽」のちょうど中間にあるとはっきりわかっていることを表しており，そこに無知性は内在していない．

このように，可能性限定命題は一般に部分的無知を誘導することになる．先の例でいえば,「70 才が若い」ということは偽であるから「年齢が若い」という命題が成立すれば,「その年齢は 70 でない」ことがわかる．しかし一方,「70 才が若いということは可能である」ということは真なのか偽なのか全くわからないのであるから,「年齢が若いということは可能である」という可能性限定命題の成立は「その年齢が 70 であるかどうか」ということに関する情報を全く与えないことになる．

第3章　ファジィ命題の確率限定

本章では「ファジィ確率限定命題」と呼ばれるファジィ命題の解釈とその真偽値の求め方について説明をする．このファジィ確率限定命題は，ある命題が「ほとんどの場合に真である」というように確率的に限定された形で与えられる命題である．ここで，ファジィ確率命題は「傾向命題」と等価的に置き換えられることが示され，さらに相対シグマカウントという概念を導入すれば，それらの真偽値を求めることができることが示される．

3.1　確率限定命題と傾向命題の解釈およびその真偽値

「(A is B) がほとんどの場合に真である」というような命題を確率限定命題といい，この命題の真偽値を求める問題はファジィ命題の確率限定と呼ばれる．ここで，A, B は共にファジィ集合であり，特に A が変数ではないことに注意する．例えば A が「日本人」を表すファジィ集合で，B が「黒髪の人」という概念を表すファジィ集合とすれば,「日本人は黒髪だということはほとんどの場合に真である」というような命題が確率限定命題となる．

この確率限定命題を Zadeh 流に表記すると，

$$(A \text{ is } B) \text{ is likely} \tag{3.1}$$

となる．ここで，likely が限定ファジィ確率である．

またこの確率限定命題は次のような形の「傾向命題」に書き換えることができる．

$$\text{most } A\text{s are } B \tag{3.2}$$

これは，先の例では,「ほとんどの日本人は黒髪だ」と言い換えたことにあたる．ここで式 (3.2) の most は「ファジィ限量作用素」と呼ばれるものである．

ただし，ここで，式 (3.1) と式 (3.2) が同値な命題を示すと思うためには，当然のことながら likely と most が数値的に等しい概念を表しているという暗黙の了解がなされている必要がある．一般に，確率限定命題と傾向命題は数値的に同等な限定ファジィ確率とファジィ限量作用素を用いれば互いに置き換えが可能であることがわかるから，これらを表すファジィ数を一般に Q（Q は $[0, 1]$ を台集合とするファジィ数）とおけば，確率限定命題も傾向命題も式 (3.2) の一般化として，

$$Q\ A\text{s are } B \tag{3.3}$$

と表現される．例えば，ファジィ限量作用素が most（限定ファジィ確率としては likely）の場合は 1 に近い方に分布のかたまったファジィ数 Q（これは，ちょうど，真理値限定における「真」のファジィ真理値と同じようなものとなるだろう）を定義し，また逆にファジィ限量作用素が few（限定ファジィ確率としては unlikely）の場合は 0 に近い方に分布のかたまったファジィ数 Q（「偽」のファジィ真理値に対応）を定義して用いればよい．

結局，問題は，式 (3.3) の形で表現された傾向命題の真偽値を求めることに帰着されるのであるが，式 (3.3) は，相対シグマカウントという概念を導入することにより，さらに，

$$\sum \text{count} \frac{B}{A} \text{ is } Q \tag{3.4}$$

と解釈される．ただし，$\sum \mathrm{count}(B/A)$ は「A における B の相対シグマカウント」と呼ばれるもので，

$$\sum \mathrm{count}\frac{B}{A} = \frac{\sum\{\mu_B(u_i) \wedge \mu_A(u_i)\}}{\sum \mu_A(u_i)} \tag{3.5}$$

と定義されている．$\sum$ はすべての $u_i(\in U)$ に対しての総和をとることを意味する．

ここで，あるファジィ集合 F に対する値

$$\sum \mu_F(u_i) \tag{3.6}$$

は F の各要素のグレードをすべて足し合わせたものであり，ファジィ集合 F の「濃度」と呼ばれるものである．これは，離散的なクリスプ集合の通常の濃度に対応するものであり，その拡張となっている．離散的なクリスプ集合の濃度は結局その集合の中に含まれる要素の個数を表していることに他ならないのであるが，この意味からすると，ファジィ集合の濃度はそのファジィ集合に含まれる要素の（それぞれの要素は含まれているかどうか二値的には判断されないにもかかわらず）等価的な個数を表していると考えられる．

以上のように考えると式 (3.5) の相対シグマカウントは，ファジィ集合 $A \cap B$ の濃度のファジィ集合 A の濃度に対する比を表していると考えられる．即ち「A」である場合（要素）の数に対して「A でしかも B」である場合（要素）の数の比率がどのくらいであるかを区間 $[0,1]$ の中のある実数で表していることになる．そして，この比率が 1 に近いということは (A is B) が起こりやすいことを示し，0 に近いということは起こりにくいことを示していることになる．

式 (3.4) の命題は，結局，この比率がファジィ数 Q であることを主張していることになるが，これが意味的に式 (3.3) の置き換えとなることは頷けるであろう．ここで，式 (3.4) の真偽値は，式 (3.5) の相対シグマカウントの値から，

$$\mu_Q\left(\sum \mathrm{count}\frac{B}{A}\right) \tag{3.7}$$

と容易に計算され，これが即ち，式 (3.3) の傾向命題（あるいはこれと等価な確率限定命題）の真偽値となる．

3.2　確率限定の実例

ここでは,「日本人が黒髪であるということはほとんどの場合に真である」という例を考えて，前節で説明した確率限定を実際に行ってみる．さて，この命題は,「日本人」を表すファジィ集合 J と,「黒髪の人」を表すファジィ集合 B を導入すれば,

$$(J \text{ is } B) \text{ is likely} \tag{3.8}$$

という形のファジィ確率限定命題で表すことができる．そしてこれは，さらに

$$\text{most } J\text{s are } B\text{s} \tag{3.9}$$

という形の傾向命題に書き換えられる．この傾向命題は内容的には,「ほとんどの日本人は黒髪である」ということを表している．

さて式 (3.9) の命題の真偽を実際に確かめるために実際に 10 人の人（$u_1, ..., u_{10}$ の 10 サンプル）を成田にでも行って調べてみたとする（むろん 10 人では少なすぎるだろうが，問題の簡単のためにこう仮定する）．すると次のような「日本人」のファジィ集合 J と「黒髪の人」のファジィ集合 B が得られたとする（図 3.1 参照）．

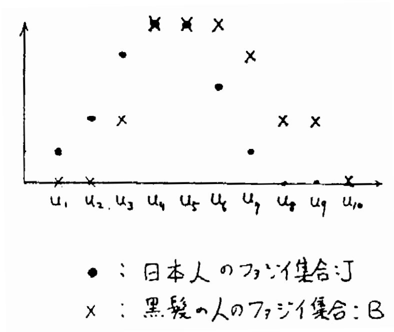

図 3.1　「日本人」のファジィ集合 J と「黒髪の人」のファジィ集合 B

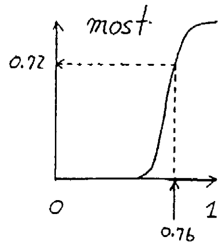

図 3.2　ファジィ限量作用素 most の例

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\mu_J(u_i)$	0.2	0.4	0.8	1.0	1.0	0.6	0.2	0.0	0.0	0.0
$\mu_B(u_i)$	0.0	0.0	0.4	1.0	1.0	1.0	0.8	0.4	0.4	0.0
$\mu_J(u_i) \wedge \mu_B(u_i)$	0.0	0.0	0.4	1.0	1.0	0.6	0.2	0.0	0.0	0.0

例えば，$\mu_J(u_3) = 0.8, \mu_B(u_3) = 0.4$ となっているが，これは，u_3 の人は日本人らしさが 0.8，つまり，ほぼ日本人ではないだろうか（ひょっとしたら外国人の血が少し混じっているようにも思えるが）と思われることを示しており，またこの人の髪の色が黒いということが 0.4 程度いえることつまり黒っぽい髪をしているが黒ではない（例えば少し赤茶けた色など）をしていることを表している．

さてここで B の J に対する相対シグマカウントを実際に計算すると次のようになる．

$$\sum \mathrm{count}\frac{B}{J} = \frac{0.0+0.0+0.4+1.0+1.0+0.6+0.2+0.0+0.0+0.0}{0.2+0.4+0.8+1.0+1.0+0.6+0.2+0.0+0.0+0.0} = 0.76 \tag{3.10}$$

さてここで，ファジィ限量作用素 most を図 3.2 のようなファジィ数として適当に定義すれば，

$$\mu_{\mathrm{most}}(0.76) = 0.72 \tag{3.11}$$

と計算されて，これが，最初の確率限定命題「日本人が黒髪であるということはほとんどの場合に真である」の真理値となる．

第4章　ファジィ論理と種々の論理体系

ファジィ理論は，Zadeh によるファジィ集合という概念の提案に端を発している．これは，それまでの集合の概念の一般化である．ここで，一般に集合論は，それを基礎付ける論理と直接にかかわっている．周知のように，数学的真理について考える体系を与えるのが論理であり，現代数学のすべては集合論の枠組みのなかで語られる．つまり，集合論を扱うということは数学基礎論を扱うことである．

ファジィ理論においても，その中心となるファジィ集合を基礎付けるために論理に関する議論が必然的に必要となり，また事実，行われている．このような努力は，ファジィ理論の生い立ちからそうであったように，特に応用的な立場から続けられてきたが，近年，数学基礎論の立場からの，より厳密な理論づけの動きも見られるようになってきている．

ファジィ理論（ファジィ集合論，ファジィ論理）は，数学基礎論にかかわる問題であるから，応用の範囲も非常に広い．極端にいえば，いままでの数学的なアルゴリズムはすべて，その論理体系をそっくりファジィ論理体系に入れ換えることにより，ファジィ化されてしまうことになる（それが工学的に有用であるかどうかはさておいてだが）．ファジィ論理は，それ以前の論理の一般化であるから，その意味では，以前の論理体系の上で作り上げられたアルゴリズムを一般化する力を持っており，これが，ファジィ理論を応用の立場からみたときの最大の魅力となっているのだ．つまり，応用の立場からすると，ファジィ論理は通常の論理を包含する，より強力な論理であるといえる．

しかし，基礎的な立場からすると，ファジィ論理自体に関する議論は通常の論理の上で論じられている．つまり，ファジィ論理で説明できることは，原理的に通常の論理で説明可能である．通常の論理で説明可能だからこそ，ファジィ論理に基づくアルゴリズムが実現可能となる．この意味ではファジィ論理は，通常の論理に包含されているともいえる．

以上のように，ファジィ理論は，応用の立場からすると通常の論理の拡張となっており，また，基礎の立場からすると通常の論理によって論理づけられるものであるというように，通常の論理と 2 つの面で非常に密接にかかわっている．したがってこのファジィ論理を画像や図形の分野で応用とする場合には，通常の論理そのもの及びそれらとファジィ論理（と，そこに立脚するファジィ理論）との関係について無関心ではいられなくなる．本章では，このような観点に立って，通常の論理（古典論理，直観主義論理，様相論理）について考察し，さらにそれらとファジィ論理との関係についての考察を加える．ただし，種々の論理はそれぞれが数学的な一大分野であるし，また，ファジィ理論のこういう方面からの議論はまだその研究が始まったばかりで体系化されているものではない．したがって，無学な筆者がこれらを体系的に解説することなど望むべくも無いことは明らかである．以下では，筆者が現在までに断片的に理解していることについて説明する．

4.1　真理値集合と完備束

論理は即ち真理値によって展開してゆくのであるから，そこで用いる真理値としてどのような集合の要素を用いるかということをはっきりさせることが必要になる．例えば，最も基本的な古典論理では，取り得る真理値の集合として，通常，$\{0,1\}$ を使っているが，ここで，0 と 1 を用いる必然性はなく $\{$ 真, 偽 $\}$ であってもよいし，$\{$ 正義, 悪 $\}$ であっても，$\{$ 美, 醜 $\}$ であってもよいだろう．

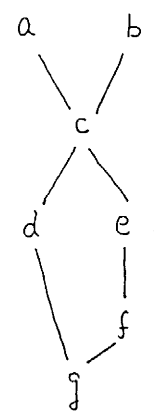

図 4.1　半順序集合の例

ただ，その集合に何らかの数学的構造を見いだすことができれば論理を展開することができる．ここでは，論理を展開するための真理値の集合の構造として用いられる束の概念について概説する．

半順序集合

まず，束を考える前に，束よりゆるい構造をもった場合，半順序集合を説明する．真理値の比較をするためには，すくなくとも真理値の間にはある順序関係が存在しなくては話にならないだろう．つまり，真理値の集合は順序に関する構造をもつ必要がある．

順序に関する基本的構造を持った集合として，以下に示すような「半順序集合」が定義される．

ある集合 P の任意の元を x, y, z とするとき

$$x \leq x \qquad \text{（反射律）} \tag{4.1}$$

$$x \leq y, y \leq x \text{ ならば } x = y \qquad \text{（反対称律）} \tag{4.2}$$

$$x \leq y, y \leq z \text{ ならば } x \leq z \qquad \text{（推移律）} \tag{4.3}$$

が成立するとき，この集合 P と二項関係 $\leq$ の組 $(P, \leq)$（または簡単に P と書くこともある）を「半順序集合」という．ここで，二項関係 $\leq$ が大小関係である必然性はなく上の三つの性質を持つ二項関係として定義されればよい．このような二項関係が導入されれば，その集合の要素間に（その導入された二項関係の意味での）半順序関係という構造が導入される．また上の定義では，必ずしもすべての任意の 2 要素間に二項関係 $\leq$ が成立することが要請されてはいないことに注意する．つまり，順序関係が定義されない要素の組が存在してもよい．半順序関係を図で表すと，図 4.1 のようなものになる．ここで，a, b, c, d, e, f, g が集合の要素で，ある 2 要素 x, y が線で繋がれていて，y が x より上の位置に書かれているとき，これらの間に $x \leq y$ の二項関係があることを示すものとする．例えば，$c \leq a, e \geq f$ であるが，e と d や，a と b の間などには順序関係はない．

上の半順序集合に対して

$$x \leq y \text{ または } y \leq x \qquad \text{（比較律）} \tag{4.4}$$

をつけ加えた集合は，「全順序集合」と呼ばれるが，もちろんこれは半順序集合の特別な場合となる．比較律は任意の 2 要素間に順序関係が定義されるように要請しているものであり，これを図で示すと，図 4.2 のように，全要素が一列に順序づけられたものになる．

真理値集合は少なくとも上の半順序集合になっている必要があるだろう．このとき，順序関係はどちらの真理値がより真に近いかを表すものと解釈される．

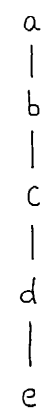

図 4.2　全順序集合の例

束

上で述べた順序関係だけでは，それぞれの要素の比較の問題が取り扱えたが，まだ要素間の演算はなにも定義されない．したがって，これでは，命題の真偽の比較はできても論理演算が全く行えず，論理展開が行えない．そこで，半順序集合に，以下に説明する二つの二項演算 $\wedge$ と $\vee$ を導入することにより,「束」という構造を持った集合が定義される．

ある半順序集合 $(P, \leq)$ の部分集合 A のすべての要素 x に対して，$a \geq x$ を満たす P の要素 a を A の「上界」といい，逆に A のすべての要素 x に対して，$b \leq x$ を満たす P の要素 b を A の「下界」という．また A の上界のうちで最小のものを A の「上限」（つまり最小上界），逆に A の下界のうちで最大のものを「下限」（つまり最大下界）という．

ある二つの P の要素 x, y を考えると，$\{x, y\}$ は当然 P の部分集合である．そこで，$\{x, y\}$ の上限を「$x \vee y$」と表すものと定義し，$\{x, y\}$ の下界を「$x \wedge y$」と表すものと定義する．ここで，もし，P の任意の 2 要素 $\{x, y\}$ に対する上限 $x \vee y$ 及び下限 $x \wedge y$ が P の要素になっていれば，このような操作は，この半順序集合上の二項演算として定義されることになる．しかし一般の半順序関係ではこのような上限，下限が存在するとは限らない．したがってこのような二項演算が定義される構造を持つ半順序関係として,「束」が定義される．つまり,

束　半順序集合 $(L, \leq)$ において，任意の要素 x, y に対して，$\{x, y\}$ の上限，下限が共に存在するとき，L は束をなすという．ここで，$\{x, y\}$ の上限，下限をそれぞれ $x \vee y, x \wedge y$ と表す．

と定義される．ここで，束 L は，詳しくは，$(L, \leq, \wedge, \vee)$ と書かれることもある．

図 4.3 に束をなしている集合の例を示す．ここで例えば $\{b, c\}$ の上界は a と b であるから $\{b, c\}$ の最小上界（つまり上限）$b \vee c = b$ が存在する．また $\{f, g\}$ の上界は a, b, c, d, e であるから最小上界（つまり上限）$f \vee g = e$ が存在する．同様にしてすべての要素の組み合わせに対して $\vee, \wedge$ による演算が集合の要素として存在していることが確かめられる．ここで，$\{f, g\}$ のように，半順序集合（$\leq$）が存在しない 2 項に対しても上の二つの 2 項演算が定義されることに注意する．

これに対して，先に挙げた図 4.1 の例は，半順序集合であったが束にはなっていない．例えば $\{a, b\}$ を考えると，この上界が図 4.1 の集合上に存在しないことからわかる．

真理値の集合に束の構造を仮定するということは，任意の二つの真理値の間に上限をとる操作（$\vee$）と下限をとる操作（$\wedge$）を導入することであり，これはまた真理値間に「撰言（または)」および「連言（かつ)」の論理演算を導入することに他ならない．

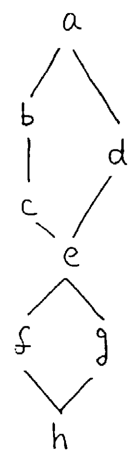

図 4.3　　束の例

以上では，束を半順序集合の特別な場合として定義したが，もっと直接的に,「束とは,

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \text{（交換律）} \qquad (4.5)$$
$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \text{（結合律）} \qquad (4.6)$$
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$(x \wedge y) \vee y = y \qquad \text{（吸収律）} \qquad (4.7)$$
$$(x \vee y) \wedge y = y$$

の 3 組の双対な性質を満たす $\vee$ と $\wedge$ が定義されている集合である」と定義することと同じことであることは一般に知られている．そこで，上の 3 律はまとめて「束の公理」と呼ばれる．

完備束

いま，L を束とし，A を L の部分集合としたとき，A の上限（最小上界）を

$$\vee A$$

と書き，特に，

$$A = \{a_i \,|\, i \in I\}$$

と表される場合は，

$$\vee A = \bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee_i a_i$$

と表されるものとする．同様に，A の下限（最大下界）を

$$\wedge A = \bigwedge_{i \in I} a_i = \bigwedge_i a_i$$

と表すことにする．

ここで,「束 L が完備である」とは，L の任意の部分集合 A に対して必ず $\vee A$ および $\wedge A$ が存在することであり，このような束を完備束と呼ぶ．

一般に無限個の要素を持つ束については，$\vee A$ および $\wedge A$ が存在するとは限られないが，存在するとすればそれぞれ唯一存在することが知られている．これに対し，有限個の要素しか持たない「有限束」の場合は必ず完備束になることも知られている．また，さらに完備束は，最大要素と最小要素を持つことも知られており，一般にこれらをそれぞれ O, I または 0,1 などと表すことが多い．

さて以上のような完備束を真理値の集合として仮定するということは,「完全な真」（最大要素 1）と「完全な偽」（最小要素 0）の存在を仮定することに他ならない．ただし，真理値として，有限個の要素しか用いない場合には，束の構造を仮定しただけで，自動的に完備性が仮定され，最大要素と最小要素は定義される．

図 4.3 の例は，有限束であるから，当然，完備束であり，最大要素 a と最小要素 h が存在する．

以上までに説明したように,「完全な真」および「完全な偽」が存在し，また「かつ」および「または」の論理演算を行うためには，真理値の集合として，完備束を使う必要がある．逆にいえば,どのような集合を真理値の集合と定義しようと，それが，完備束なっていれば,「完全な真」「完全な偽」「かつ」「または」の概念を定義することができる．以下の節ではいくつかの通常の論理体系について概観するが，それぞれの論理体系の真理値集合は，完備束のさらに特殊なものとして定義される．

4.2 古典論理

通常，最も馴染みの深いのが古典論理である．古典論理の真理値の集合としては「完備ブール束」と呼ばれる完備束の特殊なものが仮定される．これは，ある完備束の任意の要素 x, y, z に対して，さらに,

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{aligned} \qquad \text{（分配律）} \tag{4.8}$$

および,

$$\begin{aligned} x \vee \sim x &= 1 \qquad \text{（排中律）} \\ x \wedge \sim x &= 0 \qquad \text{（矛盾律）} \end{aligned} \tag{4.9}$$

を仮定した特別な完備束である．

ここで，排中律と矛盾律は合わせて相補律と呼ばれるが，これは完備束の任意の要素 x に対して，式 (4.9) を満たすようなある要素がその完備束に存在し，それを $\sim x$ と定義できることを仮定している．この $\sim x$ は元（要素）x の補元と呼ばれ，特に，x が真理値であるとき，これが x の（古典論的）否定を定義していることになる．

「完備ブール束」は，またその代数的性質に着目して「完備ブール代数 (complete Boolean algebra)」と呼ばれることもあり，通常，略して cBa と書かれる．

この cBa を基礎とした論理体系は，その構造（公理体系）の強力さ故に，論理演算間の関係が密になる．基本的に $\wedge$ と $\sim$ さえあれば，これにより真理値集合上のどんな演算も定義できることが知られている．例えば，古典論理の任意の真理値（即ち cBa の要素）x, y に対して，含意 $\rightarrow$（ならば）と撰言 $\vee$（または）は

$$x \rightarrow y = \sim (x \wedge \sim y) = \sim x \vee y \tag{4.10}$$

$$x \vee y = \sim (\sim x \wedge y) \qquad \text{（ド・モルガン律）} \tag{4.11}$$

と連言（$\wedge$）と否定（$\sim$）で表現される．ここで，含意「$x \rightarrow y$」は意味的には「x ならば y」を表すが，式 (4.10) はこれが,「x であってかつ y でないことはない」と同値であることを示している．また,

$$\sim \sim x = x \tag{4.12}$$

も成立する．

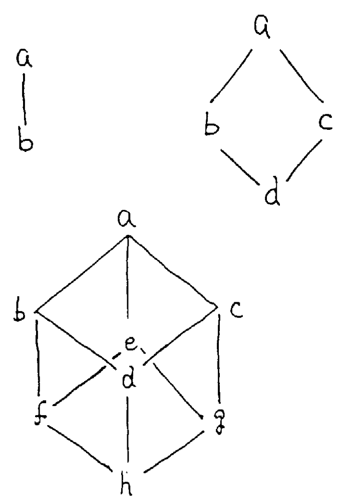

図 4.4　cBa の例

図 4.5　cBa ではないの例

このような cBa の具体例を三つ，図 4.4 に示す．ここで，通常の 2 値論理，即ち真理値集合として { 真, 偽 } あるいは $\{0,1\}$ などを用いる場合には，この 2 値に順序関係を導入すれば，自動的に cBa になってしまう．このため，2 値論理においては古典論理は必然である．

しかし，図 4.5 の 3 値論理をはじめ，一般に n 値論理や無現値論理においては，その真理値集合が，もはや cBa にならないため，古典論理ではない．

例えば無現値論理，つまり，真理値集合が閉区間 $[0,1]$ の場合を考えてみると，これは完備束であり，最小元 $O=0$，最大元 $I=1$ となる．しかし，$[0,1]$ の一つの要素 0.8 を持ってくると，$0.8 \vee x = 1$ かつ $0.8 \wedge x = 0$ となるような x は存在しない．つまり，式 (4.9) の相補律が成立しない．したがって区間 $[0,1]$ は cBa ではない．

4.3　直観主義論理

上で述べた，古典論理は 2 値論理即ち { 真, 偽 } だけを扱っているぶんには問題は無い．しかし，例えば「この命題は偽である」という命題のように,「真」とも「偽」ともそのどちらともいえない命題を，どのように扱えばよいかという問題が出てきた．このような問題に対して，第 3 の真理値として,「不定」を導入した 3 値論理が提案され，さらにその一般化として多値論理が提案された．これは，とりも直さず，命題には真でも偽でもないものが存在することを認めることであるが，これは式 (4.9) の排中律を否定，つまり古典論理を否定することになる．排中律「$x \vee \sim x = 1$」が意味的に「命題 x または命題 $\sim x$ のどちらかが真 (1) である」つまり,「x であるかまたは x でないかのどちらかである」ことを表していることから明らかであろう．

もともと古典論理では，集合論やそれらに用いられる論理などをすべて公理化し，その上でその体系から矛盾が起こらないことを証明すればよい」という立場を取っている．こういう立場からす

れば上の問題に対しては，真理値「不定」を導入する公理を付加してもっと強力な公理体系をつくることにより，その体系内の矛盾が無くなるようにすればよい．しかしこのような強化された体系でも「この命題は真か不定かであるということは偽である」という命題の真理値を定めることはできないことはすぐにわかる．

一般に，「現在の算術の公理系を含む無矛盾な公理系は不完全である．即ち，その公理系の算術命題でその公理系の中では肯定も否定もできないものが存在する．」という「ゲーテの不完全性定理」が証明されている．これは，古典論的な無矛盾な公理系による論理では証明のできない命題が必ず存在することを示している（これは必ずしも古典論理を否定するものではなく，古典論理で証明できる命題には限度があることをいっているにすぎない．）．

ここから，Brower により，直観主義の立場，即ち，具体的に明らかな概念から一歩一歩具体的に構成してゆく限り矛盾は起こりようがないという立場からの論理，「直観主義論理」が展開されるようになった．

この直観主義論理では，命題が真であることも偽であることも証明できないことがあることを積極的に認め，ある命題が真であることを証明するためには具体的にそれが真であることを構成的に導かなくてはならないという立場に立っている．つまりある命題を認めるということは，その命題を確かめる，ある構成的な具体的な方法を持っているということで，このとき，その命題は「証明可能」であるという．したがって，「p ではないことはない」つまり「$\sim\sim p$」を証明しても，それは「p である」ことを証明したことにはならない．これは古典論理で成立している式 (4.12) のような 2 重否定の性質を認めないことであり，直観主義論理では「背理法」は成立しないことを意味する．また当然，式 (4.9) の排中律も直観主義論理では認めない，

では，つぎに，この直観主義論理における真理値の集合としてどのような構造が必要となるかを説明し，その論理演算がどのように定義されるかを具体的に説明する．

直観主義論理の真理値集合の数学的構造モデルとしては，「完備ハイティング代数 (complete Heyting algebra，略して cHa)」が仮定される．ここで，cHa は完備束の特別な場合であり，完備束 Ω の任意の要素 a と任意の Ω の部分集合 $\{b_i \,|\, i \in I\}$ に対して，

$$a \wedge \bigvee_i b_i = \bigvee_i (a \wedge b_i) \tag{4.13}$$

なる条件が成立するとき Ω は cHa であるという．cHa を仮定するのは，次のような直観主義論理における含意演算（$\rightarrow$）の定義を可能とするためである．

直観主義論理では，構成的な証明だけが証明としての意味を持つため，構成的な論理演算である含意演算（$\rightarrow$）の定義が重要な意味を持つ．結論からいえば，直観主義論理の含意演算は，

$$x \rightarrow y \equiv \bigvee \{r \in \Omega \,|\, x \wedge r \leq y\} \tag{4.14}$$

と定義される．この定義は，

$$x \wedge (x \rightarrow y) = y \tag{4.15}$$

つまり，「x であり，かつ（x ならば y）である」ことが「y である」ことと一致してほしい（つまり modus pones が成立してほしい）という要請に基づくものと解釈することができる．この要請に沿えば，任意の x と y が与えられたときには，

$$x \wedge r = y \tag{4.16}$$

を満たすような r を x→y の真理値とすればよいことになる．しかし，式 (4.16) を満たすような r が必ずしも真理値集合 Ω の要素として存在するとは限らない．そこで，式 (4.16) の代わりに，

$$x \wedge r \leq y \tag{4.17}$$

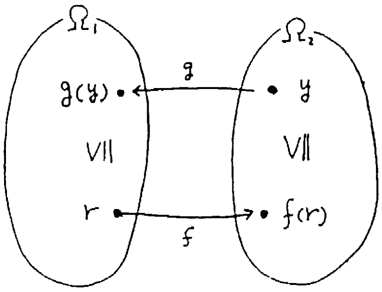

図 4.6　随伴性の概念図

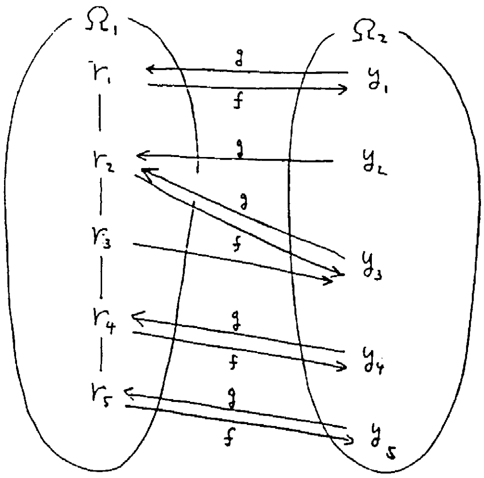

図 4.7　随伴関数の例

を満たす Ω の要素 r をすべて探し出して，その内で最も $x \wedge r$ を y に近づけるもの即ち r の上限を $x \to y$ の真理値として採用する．これが式 (4.14) の解釈である．

ここで，このように定義した $\to$ と $\wedge$ の間には随伴性という非常に重要な性質がある．一般に Ω_1, Ω_2 がそれぞれ束で，Ω_1 から Ω_2 への関数 f と Ω_2 から Ω_1 への関数 g が与えられているとするとき，すべての $r \in \Omega_1$ とすべての $y \in \Omega_2$ に対して，

$$f(r) \leq y \Leftrightarrow r \leq g(y) \tag{4.18}$$

が成立するとき,「f が g の左随伴である」または「g が f の右随伴である」という．図で表すと図 4.6 のような関係であり，図 4.7 がその具体例である．ところで，Ω を cHa とし，x, y, r を任意の Ω の要素とすると，

$$x \wedge r \leq y \Leftrightarrow r \leq (x \to y) \tag{4.19}$$

が成立することは，式 (4.14) の含意の定義より導かれる．ここで，

$$f(r) \equiv x \wedge r \tag{4.20}$$

$$g(y) \equiv x \to y \tag{4.21}$$

と関数 f と関数 g を定義すれば，式 (4.19) は式 (4.18) となる．これはつまり,「関数 $x \to (\quad)$ は，関数 $x \wedge (\quad)$」の左随伴であることを示している（図 4.8 参照）.

直観主義における，真理値集合の構造モデルとして，cHa を仮定するのは，式 (4.19) のような随伴性を満たす含意（$\to$）が定義できる（必ずしも式 (4.14) の定義とは限らない）ことを保証する

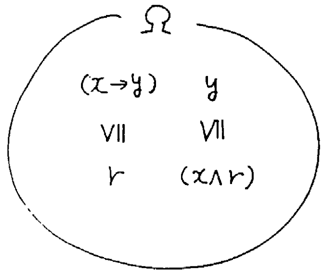

図 4.8 含意と連言の随伴性

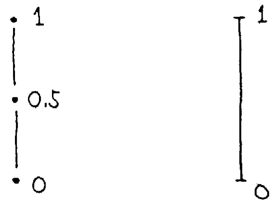

図 4.9 cHa の例

ためである．事実,「Ω が cHa であること（即ち，完備束 Ω で式 (4.13) が成立すること）」と,「完備束 Ω において式 (4.19) の随伴性が成り立つ → を定義できること」とは全く同じであることは証明できることがわかっている．

このように，直観主義論理においては，∧ と → の間に随伴性だけを要請して，cHa を真理値集合として仮定しているため，古典主義の cBa よりも束としてゆるいものを用いていること（公理系としてゆるいものを用いているといってもよい.）ことになる．事実 cBa は cHa に含まれており，直観主義論理で成立することはすべて古典論理においても成立する．しかしその逆は成り立たない．

直観主義ではゆるい公理系を用いるため，古典論理の式 (4.10) のように，→ が ∧ と ∼ によって表現されてしまうことはなく独立に定義される．また，式 (4.9) の排中律を満たす補元が一般に存在しないので，否定は別に定義する必要がある．ここで，式 (4.12) の 2 重否定の性質と式 (4.11) のド・モルガン律が成立するような否定 ∼ を定義することは可能で，これは古典論的否定あるいは擬否定と呼ばれる．しかし，この擬否定の決め方は一意ではない．つまり，古典論理では，∧ と ∼ が原始記号であったが，直観主義論理では，$\wedge, \vee, \sim, \rightarrow$ がすべて独立に定義されて原始記号となる．

ここで，擬否定 ∼ とは別に直観主義論理の含意 → に基づいて，直観主義的な否定 ¬ を

$$\neg x \equiv x \rightarrow 0 \tag{4.22}$$

（「x ならば偽」）と定義することができるが，この否定では，式 (4.12) のような 2 重否定の性質を成立せず，3 重否定に関して，

$$\neg\neg\neg x \equiv \neg x \tag{4.23}$$

が成立することが知られている．ここで，¬ を直観主義的な否定，∼ を古典論理的な否定または偽否定と区別して呼ぶこともある．

cHa の具体的な例としては，図 4.9 の 3 値論理や閉区間 $[0,1]$（即ち無限値論理の真理値の集合）などがある．一般に多値論理や無現値論理の場合の真理値集合は，cHa ではあるが cBa では無いので，直観主義論理を用いる必要がある．

4.4 様相論理

前節にみたように，古典論理の一般化（真理値集合を cBa から cHa へ一般化したという意味での一般化）として直観主義論理が導かれたが，ここで，古典論理の別の方向への一般化とみなされる「様相論理」について説明する．

様相論理で新しく扱う命題は「p であることが必然である」とか「p であることが可能である」というような命題である．ここで，様相論理では通常，上の二つの命題を必然を表す論理記号 $\Box$ と可能を表す論理記号 $\Diamond$ を用いて，

$$\Box p \tag{4.24}$$

$$\Diamond p \tag{4.25}$$

と表すことにする．

さて，ここで，式 (4.24)，式 (4.25) の真理値が，どのようになるかが興味のあるところである．そのために古典論理に様相性（ここでは必然性と可能性を指す）に関する公理を追加することになる．ここで，どのような公理を追加するかによって様相論理には多くの体系が存在するが，ここでは，最も標準的な様相論理体系の一つである「体系 T」についてのみ考えるものとする．体系 T では，古典論理の公理に次の公理が追加される．

$$\begin{rcases} \Box p \equiv \sim\Diamond\sim p \\ \Diamond p \equiv \sim\Box\sim p \end{rcases} \quad \text{（相互定義可能性）} \tag{4.26}$$

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \equiv 1 \quad \text{（分配公理）} \tag{4.27}$$

$$\Box p \to p \equiv 1 \quad \text{（必然性の公理）} \tag{4.28}$$

$$p \to \Diamond p \equiv 1 \quad \text{（可能性の公理）} \tag{4.29}$$

ここで，式 (4.26) は公理ではなく定義であるが，内容的には,「p が必然である」ことは「p でないことが可能でない」ことと同値（あるいは「p が可能である」ことは「p でないことが必然ではない」ことと同値）であることを表していると了解できる．また式 (4.27) は「p ならば q であることが必然的にいえれば，p が必然ならば q が必然であることは恒に真である」ことを表している．また式 (4.28) は「p が必然ならば p であることは恒に真である」ことを示し，式 (4.29) は,「p ならば p が可能であることは恒に真である」ことを示している．これらは，いずれも内容的に公理と了解してよいように思われる．

ここで例えば，式 (4.28) の逆つまり，$p \to \Box p \equiv 1$ は成立しないだろう．これは，p であるからといって，p が必然とはいえないことからわかる．つまり p が成立したとしても，これは，たまたま偶然に成立したのかもしれないから，必ず（必然的に）p だという証拠にはならない．これに対して式 (4.29) の可能性の公理 $p \to \Diamond p \equiv 1$ は成立する．これはたとえ偶然であっても p が成立すれば p が成立する可能性があることの証拠になることからわかる．

以上のように，様相性を含んだ命題の内容を吟味すると，$\Box p$ や $\Diamond p$ の真理値は p の真理値の関数として表せない（$\Box$ や $\Diamond$ が真理関数的でない）ことにすぐ気がつく．つまり，p の真理値がわかっても，これからだけでは $\Box p$ や $\Diamond p$ 真理値を求めることはできない．たとえ p が真（つまり $p \equiv 1$）であっても，それは偶然に真なのか必然的に真なのかは区別がつかないからである．このような様相命題を見通しよく取り扱うモデルとして Kripke のモデルが有用なので，以下に，これを概観する．

Kripke モデル

可能性世界意味論では，命題 p は恒にある一定の真理値を持っているのではなく，図 4.10 のように各々の可能性世界 u_i において異なった真理値をもつという立場に立つ．したがって，ある命

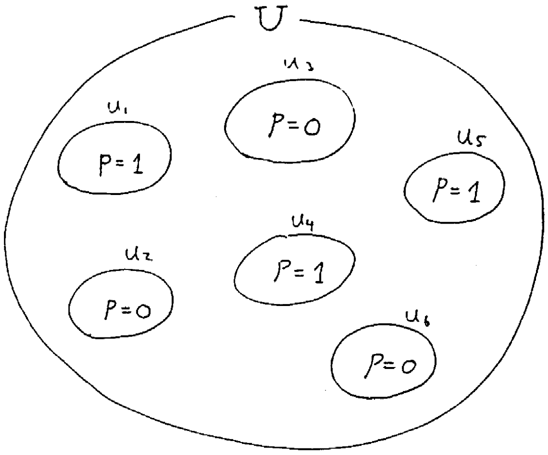

図 4.10　　可能性世界の集合と命題の真理値の例

題の真理値を得るには，命題を指定するだけではなく，可能性世界も指定しなくてはならない．ある一つの命題 p とある一つの可能性世界 u を指定したときに，その命題の真理値を与えるものを付値 v といい，次のように表す．

$$v(p, u) \tag{4.30}$$

例えば，図 4.10 の例の場合は $v(p, u_3) = 0, v(p, u_4) = 1$ である．また $p \equiv q$ つまり $p = q$ が恒真であることは，すべての u_i（$\in U$，U は可能性世界の全体集合）に対して $v(p, u_i) = v(q, u_i)$ が成立すること，即ち，

$$\forall u_i \in U(v(p, u_i) = v(q, u_i)) \tag{4.31}$$

が成立することである．

したがって，p が，たまたま世界 u_4 で真 (1) になっていることは，

$$v(p, u_4) = 1 \tag{4.32}$$

と表されるが，これに対して，恒等式 $p \equiv 1$ は

$$\forall u_i \in U(v(p, u_i) = 1) \tag{4.33}$$

と表される．

ここで，様相命題の真理値について議論するために，上の v と U の他に，$U \times U$ 上のある二項関係 R を導入したものが Kripke モデルである．ここで，関係 R は「ある世界 $u \in U$」と「u から到達可能な世界 $u' \in U$」との関係を定義づける関係であり，u' が u から到達可能であることを uRu' と書き，u から到達可能な世界すべての集合を U_u と書くことにする．即ち，

$$U_u = \{u' \mid uRu'\} \tag{4.34}$$

である．

図 4.11 の例で，

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$$

とすれば，例えば R は

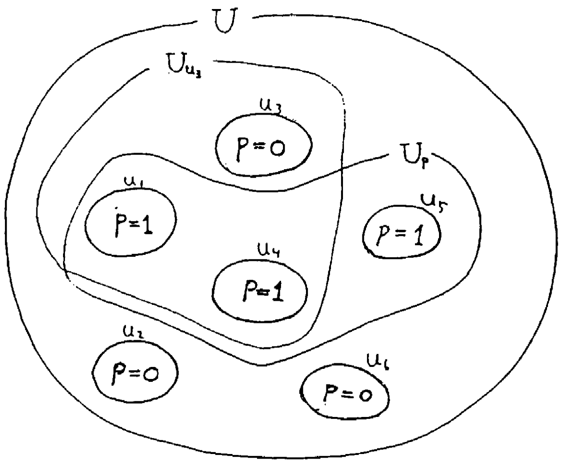

図 4.11　p を真とする世界の集合と u_3 から到達可能な世界の集合

$u' \setminus u$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_1	1	0	1	0	0
u_2	0	1	0	0	0
u_3	0	0	1	0	0
u_4	0	0	1	1	0
u_5	0	0	0	0	1

と定義することができるだろう．ここで，この R は u_3 から到達可能な世界は u_3 自身と，u_1, u_4 であり，他の世界から到達可能な世界は自分自身だけであることを定義している．またこの場合，

$$U_{u_3} = \{u_1, u_3, u_4\}$$

となる．

さてこのように関係 R が定義されたとき，$\Box p$ がある世界 $u \in U$ において真 (1) であること，つまり，

$$v(\Box p, u) = 1 \tag{4.35}$$

は，

$$\forall u' \in U_u(v(p, u') = 1) \tag{4.36}$$

と同値であると定義される．式 (4.35) と式 (4.36) は「p がある世界 u において真であることが必然であるということは，u から到達可能なすべての世界 u' において p が真となることである」と定義したことを意味する．

また $\Diamond p$ がある世界 $u \in U$ において真 (1) であること，つまり，

$$v(\Diamond p, u) = 1 \tag{4.37}$$

は，

$$\exists u' \in U_u(v(p, u') = 1) \tag{4.38}$$

と同値であると定義される．式 (4.37) と式 (4.38) は「p がある世界 u において真であることが可能であるということは，u から到達可能なすべての世界 u' のうちで，p が真になる世界が存在することである」と定義したことを意味する．

式 (4.35)，式 (4.36) の定義，および式 (4.37)，式 (4.38) の定義は，さらに，命題 p を真とするすべての集合を U_p と定義すれば，即ち，

$$U_p = \{u \mid v(p,u) = 1\} \tag{4.39}$$

と定義すれば，

$$v(\Box p,u) = 1 \Leftrightarrow U_p \cap U_u = U_u \tag{4.40}$$

$$v(\Diamond p,u) = 1 \Leftrightarrow U_p \cap U_u \neq \phi \tag{4.41}$$

と定義したことと同じであることは容易にわかる．

このように，結局，Kripke モデルにおいて，$\Diamond p$ および $\Box p$ の世界 u での真理値は，u から到達可能な世界すべての集合 U_u と命題 p が真となる世界すべての集合 U_p の共通集合を調べることによって式 (4.40)，式 (4.41) のように決定される．例えば，式 (4.11) の例では，

$$U_p = \{u_1, u_4, u_3\}$$

であるから，

$$U_p \cap U_{u_3} = \{u_1, u_4\}$$

となり，$v(\Diamond p, u_3) = 1$ だが，$v(\Box p, u_3) = 1$ とはならないこと，つまり $v(\Box p, u_3) = 0$ となることがわかる．

この Kripke モデルは R に対する条件を変えることによって様々な様相論理体系を説明できることが知られている．T 体系の場合は，R に対する条件として反射律だけを要請する場合，つまりすべての $u \in U$ に対して uRu であること（さらにいえばどの世界においても自分自身は必ず到達可能世界であること）だけを要請する場合にあたる．このとき，すべての世界 $u \in U$ において，式 (4.26) から式 (4.29) までが成立し，これらが恒真となる．

様相論理では，$\Box$ は必然性を，$\Diamond$ は可能性を表すと解釈するのが通常であるが，そう解釈しなくてはならない必然性はない．必然性と可能性の他にも様相性を表す概念がある．例えば,「義務」と「許容」である.「$\Box p$」を「p とすることは義務である」,「$\Diamond p$」を「p とすることは許容される」,「p」を「p をする」と読めば,「$\Box p \to p$」は「p をすることが義務ならば p をする」,「$p \to \Diamond p$」は「p をするならば p は許容されている」,「$\Box p \equiv \sim\Diamond\sim p$」は「$p$ をすることが義務であるということは，p をしないことが許容されていないことと同じである」と解釈されるのがわかる．

4.5　ファジィ理論と他の論理体系の関係

本節では，ファジィ理論と前節までに紹介した種々の論理体系とのかかわりについて述べる．

古典論理上の理論としてのファジィ理論

数学的な議論は通常，古典論理の上で行っており，いままでの本報告書のファジィ理論に関する議論自体もそうであった．これは，真，偽をはっきりさせる議論を行っているためである．また，ファジィ理論に基づくアルゴリズムも，それを実際に計算機上で実現するためには，最終的なプログラムの段階で古典論理に置き換えられていなくてはならない．なぜなら，計算機自体が cBa 上の論理回路だけで構成されているからである．このように，ファジィ理論（あるいはファジィ論理）といっても結局は古典論理上で議論なりアルゴリズムの構築なりを行っていることになる．また，だからこそ，ファジィ理論が理論足り得るわけだし，ファジィ応用システムが現実に稼動しているのである．ファジィ理論自体が曖昧ではお話にならない．ファジィ理論は，古典論理的には，直接

的にはっきり表せないような問題を（日常会話で,「論理的でない」といわれるような問題）をいかに論理的に表現するかという手段を与える古典論理上の理論である．つまり，ファジィ理論は,ファジィ論理（曖昧さを含む論理）を扱うために，古典論理の上に定義された理論である．これは,古典論理を包含している直観主義論理や様相論理が，その包含しているはずの古典論理上で議論されるのと同じ事情である.

当たり前のことだが，ここで確認しておくと,

$$X \text{ is } A \tag{4.42}$$

なるファジィ命題は，古典論理上で,

$$((x \in A) = \mu_A(X)) \equiv 1 \tag{4.43}$$

であることだと定義されたのである．つまり「$(X \in A)$ と表される X の関数が，$\mu_A(X)$ なる関数と同じであることが恒真である」と古典論理上で定義されたのである．ここで，古典論理は $(X \in A)$ や $\mu_A(X)$ の値が何物なのか，何を意味するのかということに関しては，なんら関知していない．ただ，それらが恒等であることを定義として受け入れているにすぎない．それらがファジィ集合 A に X が含まれているということのグレードや真理値を与えているというような意味付けは，他の論理なり哲学なりが行うことで古典論理の知ったことではないのである．また，ファジィ命題,

$$X \text{ is } A \cap B \tag{4.44}$$

は，古典論理上で,

$$((X \in A \cap B) = \mu_A(X) \wedge \mu_B(X)) \equiv 1 \tag{4.45}$$

と定義されるが，これにしても，古典論理は中の等号関係が恒に成立していることを定義として受け入れているだけで，これが共通集合の定義を与えていることなどはもちろんのこと，等号の両側にある値が真理値としての意味を持つことさえ，いっさい関知していない．この定義の意味付け自体は，他の論理，他の哲学が与えている.

ファジィ理論自体は，このように，曖昧な論理というものを哲学的に考察して，曖昧な論理における公理を探し，それを古典論理上に定義としてゆくことによって作られる体系であるといえる.古典論理上で定義されれば，あとは（古典論理の公理系の範囲内で）議論を真，偽をはっきりさせながら進めることができる.

実は, ファジィ論理に限らず，他の論理体系について古典論理上で議論することは通常行われていることである．またさらに，様々な論理体系を，統一的に，また形式的に取り扱うためのひな型ともいえる形式論理が Gentzen によって生み出され，その上でそれぞれの論理体系を表して，相互の論理体系間の関係を調べる研究も多く行われている．したがって論理体系に関する議論は，この形式論理に沿ってすすめればさらに厳密に取り扱えるのだが，筆者はいまだ形式論理に明るくないので，ここでは，これ以上ふれないことにする.

タイプ 1 ファジィ集合と直観主義論理

タイプ 1 のファジィ集合では，メンバシップ関数のグレードが，閉区間 $[0,1]$ の中にある実数として定義されている．ここで，あるメンバのグレードは,「そのメンバがメンバシップ関数により定義されるファジィ集合に含まれている」という命題に対する真理値を与えていると考えてきた.つまり，メンバシップ関数のグレードは真理値そのものであり，これが区間 $[0,1]$ で定義されるということは，真理値の集合として，区間 $[0,1]$ を仮定していることに他ならない．ここで，4.2 節,4.3 節でみてきたように，区間 $[0,1]$ は束として見た場合，cHa にはなっているが，cBa にはなって

いない．したがって，これから，真理値の集合として区間 $[0,1]$ を仮定するタイプ 1 ファジィ集合は，古典論理ではなく直観主義論理上の概念であることがわかる．

さてここで，真理値集合を閉区間 $[0,1]$ としたときに，それぞれの論理演算が具体的にどのように定義されるかをみてみよう．

まず古典論理的な否定（$\sim$，擬否定）として，

$$\sim x \equiv 1 - x \tag{4.46}$$

を定義することができる．これは $[0,1]$ で擬否定としての性質，式 (4.11) と式 (4.12) を満足する論理演算となっている（前報告書 [1] で報告したように，このような性質を満たす否定演算は他にも考えられる.）．

次に，含意演算は式 (4.14) により，

$$\begin{aligned} x \to y &\equiv \bigvee\{r \in [0,1] \,|\, x \wedge r \leq y\} \\ &= \begin{cases} 1 & (x \leq y) \\ y & (x > y) \end{cases} \qquad \text{（Gōdel の含意）} \end{aligned} \tag{4.47}$$

となる．これは，Gōdel の含意と呼ばれるものである．

もちろんここで，$\vee$ と $\wedge$ は通常の実数の大小関係に基づく min,max の演算である．

このように，直観主義論理に従えばタイプ 1 のファジィ集合における含意演算は，式 (4.47) の Gōdel の含意となるのが当然のように思える．しかし，$[0,1]$ 上の含意としては種々のものが現在までに定義されており，前報告書で報告したように，ファジィ理論の含意としても種々のものが用いられているのが現状である．例えば Zadeh の含意は，

$$x \to y \equiv (x \wedge y) \vee (1 - x) \qquad \text{（Zadeh の含意）} \tag{4.48}$$

と与えられるし，Lukasiewicz の含意は，

$$x \to y \equiv 1 \wedge (1 - x + y) \qquad \text{（Lukasiewicz の含意）} \tag{4.49}$$

と与えられる．また Mandani の含意は，

$$x \to y \equiv x \wedge y \qquad \text{（Mandani の含意）} \tag{4.50}$$

であった．他にも，

$$x \to y \equiv \begin{cases} 1 & (x \leq y) \\ \dfrac{y}{x} & (x > y) \end{cases} \qquad \text{（Gouen の含意）} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned} x \to y &\equiv (1 - x) \vee y \\ &= 1 - (x \wedge (1 - y)) \qquad \text{（古典論理的含意）} \end{aligned} \tag{4.52}$$

など種々のものがある．

これらの数多くある含意演算は，どう解釈すればよいだろうか．Mandani の含意（式 (4.50)）は含意を単に連言に置き換えたものとみるより他ないだろう．古典的含意（式 (4.52)）は，cHa 上の「x ならば y」に対して，cBa 上の古典論理的な解釈「x ではないかまたは y である」（式 (4.52) の 2 行目の形では「x でありかつ y でないことはない」）を（この解釈は 2 値論理的に考えるからこそもっともらしいのにもかかわらず）強引に持ち込んだものと考えられる．Zadeh の含意（式 (4.48)）は「x ならば y」を「x でかつ y であるか，または x ではない」ことだと解釈していることに当たるが，この解釈も 2 値論理的に考えた cBa 上での解釈であり，これを cHa 上に強引に持ち込んで

いるように考えられる．いずれにしても，これら三つの含意は，直観主義的な（つまり，式 (4.15) のような modus ponens を満たすような含意を定義しようという立場にたった）含意とは関係なく，cBa 上の古典論的な議論をそのまま cHa 上に強引に持ち込んだものと思われる．

それに対して，Lukasiewicz の含意（式 (4.49)）と Gouen の含意（式 (4.51)）はある意味で，直観主義的な含意といえる．即ち，式 (4.15) の中に現れる論理積 $\wedge$ を限界積 $\supset$ あるいは代数積 $\cdot$ で置き換えたものが，

$$\bigvee\{r \mid x \supset r \leq y\} = 1 \wedge (1 - x + y) \tag{4.53}$$

$$\bigvee\{r \mid x \cdot r \leq y\} = \begin{cases} 1 & (x \leq y) \\ \dfrac{y}{x} & (x > y) \end{cases} \tag{4.54}$$

とそれぞれの含意に一致するのである．ただし，ここで，

$$x \supset y = 0 \vee (x + y - 1) \tag{4.55}$$

である．これは，連言（かつ）の概念を表す演算として論理積 $\wedge$ を用いないで，他の積演算（あるいは T ノルム）である，限界積，代数積を用いた場合，modus pones を満たすような含意が，それぞれ，Lukasiewicz の含意，Gouen の含意であるということである．また，限界積と Lukasiewicz 含意，代数積の Gouen 含意の間にはそれぞれ随伴関係がある．

前報告書の段階では，T ノルムの選び方にかかわらず適当な含意を用いてよいとしたが，このように，modus ponens の成立に着目した場合，選んだ連言と随伴関係にある含意を選ぶことには意味のあることであろう．通常，ファジィ推論では，(X is A) と ((X is A)$\to$(Y is B)) から，(Y is B) が得られない，つまり，推論のレベルでの modus ponens が成立しないことが指摘されているが，それは，その元となる論理演算の段階で，上のような随伴関係にある論理演算を使っていないからである．よくファジィ推論では，連言として論理積，含意として Zadeh か Lukasiewicz のものを用いるが，それらは，随伴関係にないのである．また，実際に，論理積と Gōdel の含意，代数積と Gouen 含意，限界積と Lukasiewicz 含意をそれぞれペアで用いれば，ファジィ推論のレベルにおいても，modus ponens が成立することが確かめられる．

上の含意の内で，Lukasiewicz の含意には，さらにおもしろい性質があることがわかる．限界積 $\supset$ を論理積 $\wedge$ の代わりに用いれば，式 (4.52) の古典論理的含意からも式 (4.49) が導かれるのである．これは，Lukasiewicz 含意が，限界積に対しても，直観主義論理的な意味からも，古典論理的な意味からも，含意となっていることを示している．

さらに，この連言と含意の随伴性は modus ponens の成立に関する問題以外にファジィ・システムの逆問題や同定を解くために重要な役割を担っている．またここから可能性システムと必然性システムという双対ファジィ・システムが定義されることから，様相性にも大きなかかわりがある．しかし，現段階ではいまだこの点に関する詳細な検討を済ませていないのでここではこれ以上は述べないことにする．

タイプ 2 ファジィ集合と様相論理

タイプ 2 ファジィ集合のグレードつまり，言語的真理値は区間 $[0, 1]$ を台集合とするファジィ集合であった．この言語的真理値の自由度は大きく，人間が日常の生活で漠然と抱いている真理に関する概念をうまく表現するために有効であった．しかしその一方，言語的真理値の集合，即ち $[0, 1]$ 上のファジィ集合のすべてを要素として集めた集合の代数的な構造は束にすらならないことが知られている．つまり，言語的真理値の集合は代数的な構造が非常に希薄であることを意味し，したがって，この上で代数的な論理演算を用いた論理体系を作ることはほとんど不可能であること

を示している．言語的真理値は表現能力としては非常に大きいがその論理的な取扱いが非常に困難なのである．

そのため，言語的真理値のすべてを扱わないで，その特別な場合である，区間真理値や，ファジィ・インターバル論理における真理値だけを真理値の集合の要素として用いる方法が提案されている．これらの真理値を用いると，言語的真理値よりは表現の自由度がある程度制限されつつもなお言語的真理値の表現力の多くを継承しており，しかもその代数的な構造が強くなることにより論理演算がうまく定義されるようになる．

いずれにしても，タイプ 2 ファジィ集合の真理値は一般に幅を持つようになるのがタイプ 1 ファジィ集合と大きく異なる部分である．タイプ 1 ファジィ集合の真理値は常にある確定した幅を持つのに対して，タイプ 2 ファジィ集合の真理値は，一般にある値に確定しないで，幅を持つ．真理値に幅があるということは，その幅の中のどの真理値でもあり得る「可能性」があるということである．このような事情から，タイプ 2 ファジィ集合の真理値は様相性の概念と関係がありそうに思える．またこれは，第 2 章の可能性限定により，タイプ 2 ファジィ集合の真理値の特別の場合，即ち区間真理値が誘導されたことからみても明らかであろう．さらに，区間真理値やファジィ・インターバル論理の真理値では，可能性真理値，必然性真理値という概念が用いられている．

様相性と言語的真理値の関係については第 5 章で，また，ファジィ・インターバル論理と様相性に関しては第 6 章でさらに考察することにする．

第5章　可能性，必然性と区間真理値

前章までで，タイプ2ファジィ集合は，可能性，必然性といった様相概念と関連が深いということを示唆した．本章では，ファジィ理論，ファジィ集合と可能性，必然性という様相概念がどのように係わりあっているかについてさらに考察を加える．

ここで，まず可能性，必然性とはどういう概念なのかを感覚としてとらえるために，簡単な場合として，クリスプな集合を取り上げて，そこで，可能性，必然性がどのように測られるのかについて考察する．そして，それがクリスプ集合をファジィ集合に拡張した場合，可能性，必然性の測り方がどのように拡張されるのかをみた後，このような可能性，必然性が，第4章で紹介した，様相論理の Kripk モデルとどのように対応しているのかということについて考察する．さらに，第1章で紹介した言語的真理値（即ちタイプ2ファジィ集合の真理値）とその特別な場合である区間真理値および可能性，必然性の間にはどのような関係があるのかを考察する．最後に可能性，必然性が実際にファジィ理論の手法として応用されている例として，ファジィ数の大小関係の比較の場合を紹介する．

5.1　クリスプ集合に対する可能性測度と必然性測度

本節では，まず可能性，必然性とはどのようなものかを感覚的につかむために，クリスプな集合のばあいだけを考えて考察する．

さて，ある全体集合 U の中の二つの部分集合（クリスプ）F, A を考える．そしていま，

$$X \text{ is } F \tag{5.1}$$

だとわかっているとする．つまりこれは「X は F の要素である」とわかっていることを意味する．このとき，

$$X \text{ is } A \tag{5.2}$$

ということ，即ち「X は A の要素である」ということがありえるかどうかを考える．これが即ち「可能性」であるかないかを考えることである．すると，集合 F と A の間に重複する部分があれば，つまり $F \cap A$ が空集合でなければ，そういう可能性があって，重複する部分がなければ，つまり $F \cap A$ が空集合であれば，そういう可能性がないことは容易にわかる．そこで,「X が F の要素であるとき，それが A の要素である可能性」を $\Pi_F(A)$ と書き，そのような可能性があるとき，$\Pi_F(A) = 1$，可能性が無いとき，$\Pi_F(A) = 0$ と書くことにすれば，

$$\Pi_F(A) = \begin{cases} 1 & (F \cap A \neq \phi) \\ 0 & (F \cap A = \phi) \end{cases} \tag{5.3}$$

となる（図5.1参照）．

一方,「X は F の要素である」（式 (5.1)）とわかっているときに,「X は A の要素である」といえないはずはないといえるかどうかについて考える．これが即ち，そうである「必然性」があるかないかを考えることである．すると，これは,「X が F の要素であって A の要素でないことはない」といえるかどうかを考えていることであるから，集合 F と集合 A の補集合 $\mathrm{not}(A)$ の共通

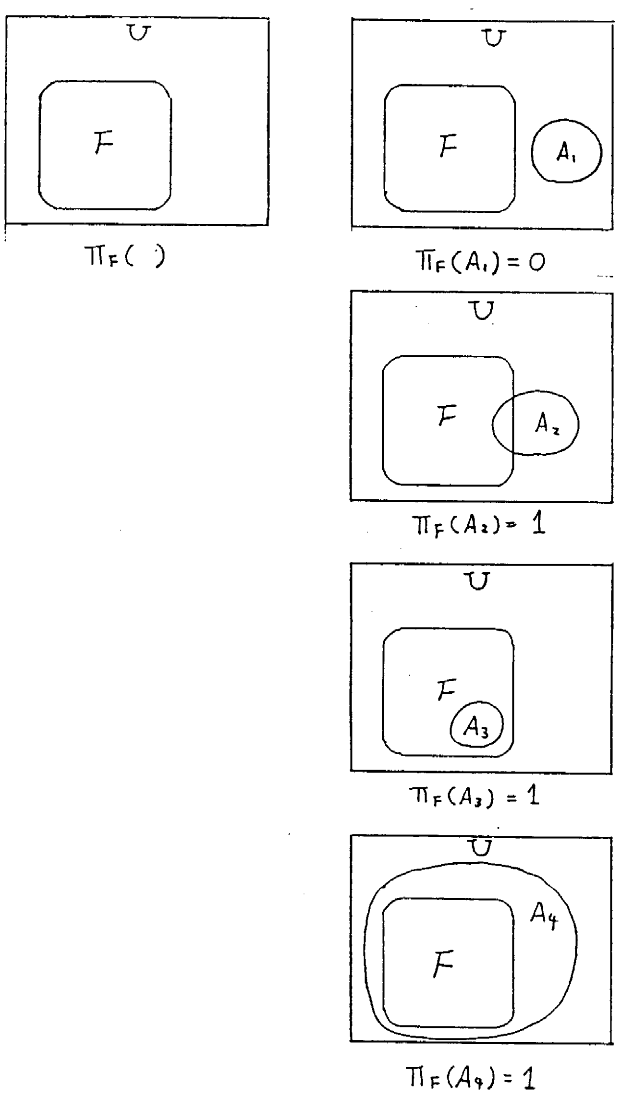

図 5.1　　クリスプ集合の可能性測度の例

部分が無ければ，つまり $F \cap \mathrm{not}(A)$ が空集合であれば必然性があって，空集合でなければそういう必然性がないことは容易にわかる．そこで,「X が F の要素であるときに，それが A の要素である必然性」を $N_F(A)$ と書き，そのような必然性があるとき，$N_F(A) = 1$，必然性が無いとき，$N_F(A) = 0$ と書くことにすれば,

$$N_F(A) = \begin{cases} 1 & (F \cap \mathrm{not}(A) = \phi) \\ 0 & (F \cap \mathrm{not}(A) \neq \phi) \end{cases} \tag{5.4}$$

となる（図 5.2 参照）.

ここで，式 (5.3) の $\Pi_F(\ \ )$ と，式 (5.4) の $N_F(\ \ )$ は関数とみたとき，全体集合 U の部分集合の全体を定義域とし，$\{0, 1\}$ を値域とする集合関数となっており，それぞれ次節で説明する可能性測度，必然性測度の特別な場合となっている．

5.2　ファジィ集合に対する可能性測度と必然性測度

さて前節でみたように，クリスプ集合のみを扱う場合には，式 (5.3)，式 (5.4) によって可能性，必然性が求められた．しかし，ここで扱う集合をファジィ集合に一般化すると，これらの定義で可

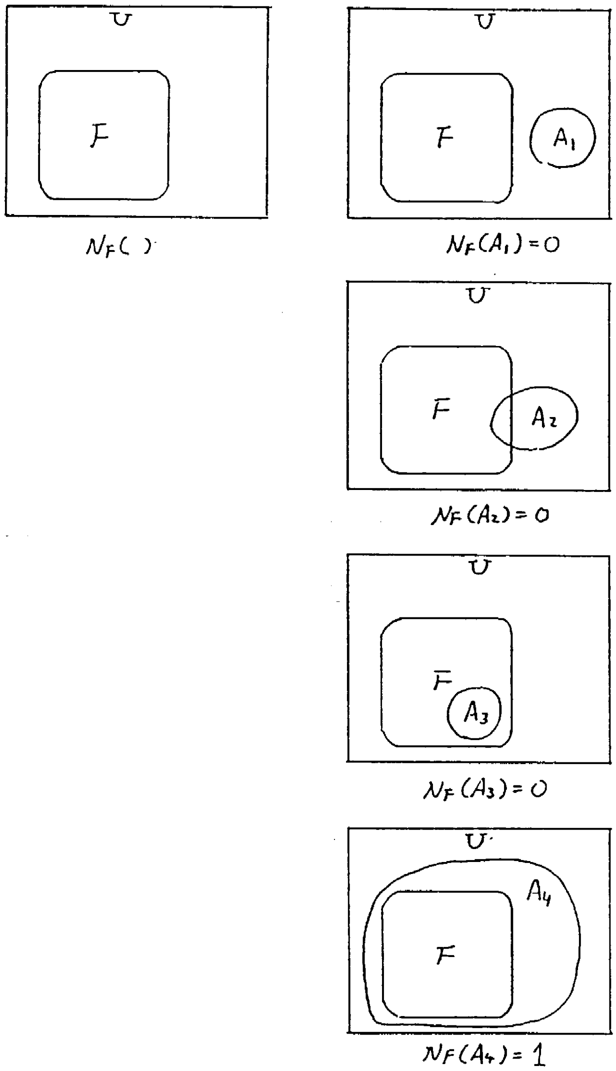

図 5.2　クリスプ集合の必然性測度の例

能性，必然性を求めることは自然ではない．式 (5.3)，式 (5.4) では，共通部分が「ある」か「ない」かによって，可能性，必然性をあるかないか即ち 0 か 1 かの 2 値で評価した．しかし，ファジィ集合の場合は，共通部分があるかないかは 2 値で判断するべきではなく,「どの程度あるといえるのか」あるいは「どの程度無いといえるのか」を問題としなくてはならない．またその結果, 可能性，必然性もあるかないかではなく，それらがどの程度あるのかという程度問題として評価されなくてはならない.

可能性測度

まず可能性について考える．前節と同じように,

$$X \text{ is } F \tag{5.5}$$

とわかっているときに,

$$X \text{ is } A \tag{5.6}$$

である可能性 $\Pi_F(A)$ を考える．ただし，今度の場合は，F および A が共に，ファジィ集合であるものとする．すると,「$\Pi_F(A)$ がある」ということは「F であってかつ A であるような F と A の

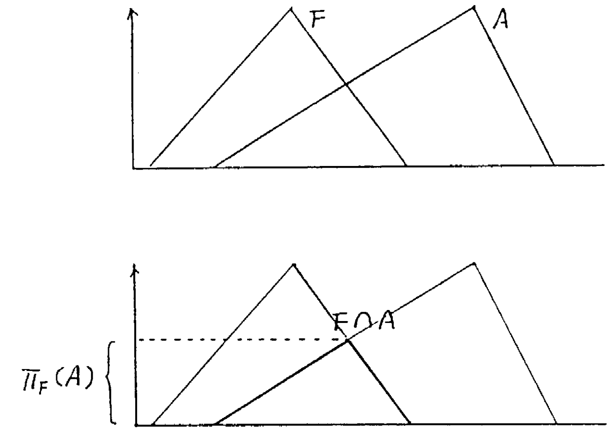

図 5.3　ファジィ集合の可能性測度

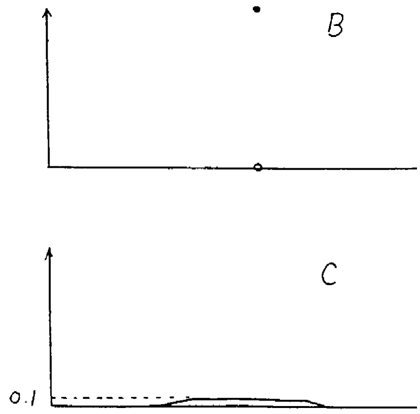

図 5.4　極端なファジィ集合の例

共通部分 $F \cap A$ がある」ことだということは前節同様，意味的な問題は無いように思われる．しかしここで F, A がファジィ集合であることから，一般に $F \cap A$ もファジィ集合である．例えば図 5.3 の場合を考えると $F \cap A$ は正規でないファジィ集合となる．ここで，共通部分 $F \cap A$ があるということはもう少し正確にいえば，$F \cap A$ が要素を持つということであるがファジィ集合が要素を持つとはどういうことだろうか．

クリスプ集合の場合は ϕ でなければ要素を持つということだし，ϕ ならば要素を持たないということと考えられる．しかし，ファジィ集合の場合はどうだろうか．例えば，極端な場合，即ち図 5.4 の C のようなファジィ集合を考えたとき，$C \neq \phi$ であるが，C は要素を持つとはほとんどいえないと思われる．これに対して，図 5.4 の B の場合は要素を 1 つしか持たないが，これははっきり要素を持つといえる．つまり，要素を持つということは，要素をいくつ持つかは関係なく，たとえ一つでもはっきり要素といえるものが存在すればもちろん要素を持つといえるし，いくら多くの要素が 0 でないグレードをもっていても，それらすべてのグレードが非常に低ければ要素を持つとはいい難くなる．これらから，ファジィ集合が要素を持つといえる度合いは，台集合の要素のどれか一つでよいから最高のグレードを持つものを持ってきて，そのグレードをもって要素を持つ度合いとすればよいことがわかる．つまり，ファジィ集合 F が要素を持つ度合いは

$$\bigvee_{u} \mu_F(u) \tag{5.7}$$

である．図 5.4 の場合は，B が要素を持つ度合いは 1 となり，C が要素を持つ度合いは 0.1 となる．

以上のように考えると，$\Pi_F(A)$ は「$F \cap A$ が要素を持つ度合い」と考えてよいだろうから，ファジィ集合の場合，

$$\Pi_F(A) = \bigvee_u \{\mu_F(u) \wedge \mu_A(u)\} \tag{5.8}$$

と（$F \cap A$ のメンバシップ関数が $\mu_F(X) \wedge \mu_A(X)$ であることに注意して）定義することができ，これが「$(X \text{ is } F)$ のとき $(X \text{ is } A)$ の可能性」を $[0,1]$ の度合いで示すことになる（図 5.3 参照）．

必然性測度

式 (5.5) であるとき式 (5.6) である必然性 $N_F(A)$ を考える．もちろん F および A が共に，ファジィ集合であるものとする．すると，「$N_F(A)$ がある」ということは「F であってかつ A でないような部分つまり，F と $\mathrm{not}(A)$ の共通部分 $F \cap \mathrm{not}(A)$ がない」ことだということは前節と同様，意味的に問題は無いように思われる．ここで，共通部分 $F \cap \mathrm{not}(A)$ が無いということはもう少し正確にいえば，$F \cap \mathrm{not}(A)$ が要素を持たないということである．

可能性測度でみたように，ファジィ集合が要素を持つ度合いは，最高のグレードをもつ要素のグレードであった．同様に考えると，ファジィ集合が要素を持たない度合いは，最も要素らしい要素，即ち最高のグレードを持つ要素が，どの程度，要素ではないといえるかという度合いと考えてよいだろう．これは，即ち要素を持つ度合いの否定である．従って，ファジィ集合 F が要素を持たない度合いは，

$$\sim \left(\bigvee_u \mu_F(u) \right) \tag{5.9}$$

である．

このように考えると，$N_F(A)$ は「$F \cap \mathrm{not}(A)$ が要素を持つ度合い」と考えてよいだろうから，ファジィ集合の場合，

$$N_F(A) =\sim \bigvee_u \{u_F(u) \wedge \sim \mu_A(u)\} \tag{5.10}$$

と（$F \cap \mathrm{not}(A)$ のメンバシップ関数が $\mu_F(X) \wedge \sim \mu_A(X)$ であることに注意して）定義することができ，これが「$(X \text{ is } F)$ のとき $(X \text{ is } A)$ の必然性」を $[0,1]$ の度合いで示すことになる．ここで，$\sim X$ として，$1 - X$ を用いると，式 (5.8) は，

$$\begin{aligned} N_F(A) &= 1 - \bigvee_U \{\mu_F(u) \wedge (1 - \mu_A(u))\} \\ &= \bigwedge_u \{(1 - \mu_F(u)) \vee \mu_A(u)\} \end{aligned} \tag{5.11}$$

となる．式 (5.11) の第 1 式は $F \cap \mathrm{not}(A)$ の最大グレードを 1 から引いたものであり，第 2 式は $F \cup \mathrm{not}(A)$ の最小グレードであるが，これらが一致することは図 5.5 より明らかである．

本節で定義した可能性測度（式 (5.8)），必然性測度は（式 (5.11)）をそのままクリスプ集合に適用すれば，前節の式 (5.3) および式 (5.4) と同じ結果が得られることは容易にわかる．この意味で，式 (5.8)，式 (5.11) は式 (5.3)，式 (5.4) の一般化となっている．しかし，可能性測度，必然性測度の一般化は，本節で行った定義にかぎるわけではない．

一般には，下のような測度が可能性測度として定義される．

可能性測度　集合 U の部分集合を区間 $[0,1]$ の数値に対応づける集合関数 Π は，次の公理を満たすとき，可能性測度と呼ばれる．

(P1) $\Pi(\phi) = 0$ かつ $\Pi(U) = 1$

(P2) $\forall A, B \subseteq U,\ \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$

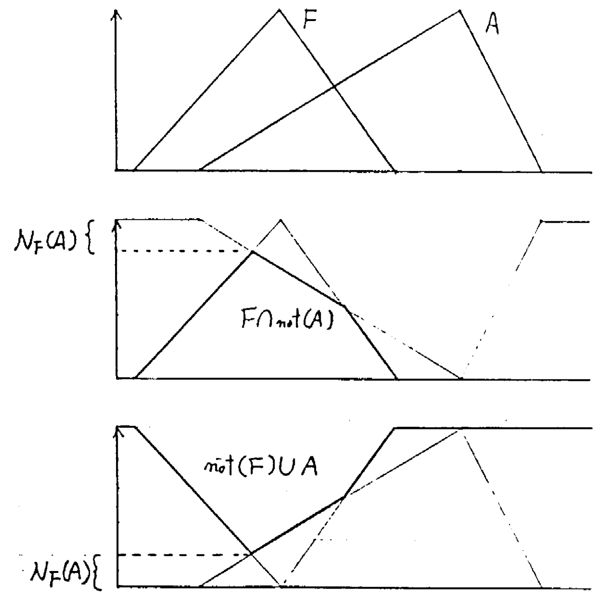

図 5.5　ファジィ集合の必然性測度

P1 は ϕ 集合の要素になることは可能でないことと，全体集合の要素となることは可能であることを表している．また，P2 は，A の要素かまたは B の要素になることが可能な程度は，A の要素になることが可能な程度と B の要素になることが可能な程度のどちらか大きいほうに一致することを表している．これは，可能性の物理的な概念と矛盾していない．もちろん，本節で定義した式 (5.8) の測度 Π_F は上の定義を満たしており，可能性測度の一種である．

一方，必然性測度は一般に以下のように定義される．

必然性測度 集合 U の部分集合を区間 $[0,1]$ の数値に対応づける集合関数 N は次の公理を満たすとき，必然性測度と呼ばれる．

(N1) $N(\phi)=0$ かつ $N(U)=1$

(N2) $\forall A,B\subseteq U,\ N(A\cap B)=\min(N(A),N(B))$

N1 は必然的には空集合の要素にならないこと，必然的に全体集合 U の要素となることを表している．また N2 は，必然的に A の要素でもありかつ B の要素でもあるといえる程度のどちらか小さいほうに一致することを表している．これは必然性の物理的な概念と矛盾していない．式 (5.11) の測度 N_F は上の定義を満足しており必然性測度の一種と認められる．

可能性測度，必然性測度は独立に別々のものを定義することも可能であるが，片方を定義して，それから，それと双対な測度を求めることによってもう片方を定義することができる．つまり，P1, P2 を満足するある可能性測度 H を定義して，それから N を

$$N(A)=\sim H(\mathrm{not}(A)) \tag{5.12}$$

と定義すれば，N は N1, N2 を自動的に満足することが確かめられる．また逆に $N(A)$ から H を

$$\Pi(A)=\sim N(\mathrm{not}(A)) \tag{5.13}$$

と定義することも可能である．これらは，4.1 節の様相論理で述べた可能性，必然性の相互定義可能性（式 (4.26)）と対応している．

式 (5.8) と式 (5.11) は別々に定義したが，式 (5.12) を満たしており，これらは相互定義可能であ

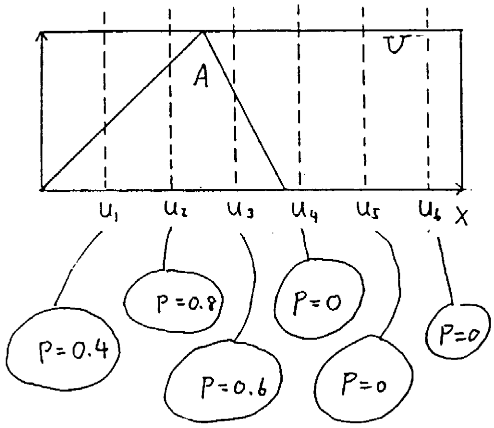

図 5.6　メンバシップ関数にみる可能性世界

る．即ち，

$$\begin{aligned} N_F(A) &= \sim \Pi_F(\mathrm{not}(A)) \\ \Pi_F(A) &= \sim N_F(\mathrm{not}(A)) \end{aligned} \tag{5.14}$$

となっている．

5.3　様相論理の Kripke モデルと可能性測度，必然性測度

5.2 節，5.3 節では「X is F」であるときに「X is A」である可能性と必然性を測る測度について説明した．本節では，この測度が，4.4 節で述べた様相論理の Kripke モデルとどのような関係にあるか議論する．

Kripke モデルと可能性測度

まず,「X is A」の可能性について考える．ここで，命題「X is A」を p と置く．すると，p の真理値は X の値を u と定めれば $\mu_A(u)$ と定まる．したがって，これは，X の定義域を可能性世界の全体集合 U と考え，$u \in U$ をある可能性世界と考えれば，付置 v を用いて，

$$v(p,u) \equiv v((X \text{ is } A),u) \equiv \mu_A(u) \tag{5.15}$$

と表すことができる．つまり，A の台集合が可能性世界の全体で，台集合の一つの要素が一つの可能性世界と考えるわけである．図 5.6 のような 1 次元のファジィ集合による命題「X is A」を例にとると，メンバシップ関数に垂直な断面で切断したそれぞれの切り口が各可能性世界に対応して，「X is A」の切り口での真理値（つまりグレード）がその可能性世界での命題「X is A」の真理値を与えていると考えることになる（図 5.6 では 6 個の可能性世界しか示していないが，この場合，台集合が有限集合なので，可能性世界は実際には無限個ある.）.

さて，ここで，Kripke モデルによると，可能性世界 u における $\Diamond p$ の真理値は，式 (4.41) によると u から到達可能な可能性世界の集合 U_u と p が真となる可能性世界の集合 U_p の共通集合が空集合でないとき，$\Diamond p$ は 1 であると与えられた．ところで，いま興味があるのは,「X is F」であるとき,「X is A」である可能性である．これは言い換えると,「X is F」であるとき,「$\Diamond(X$ is $A)$」即ち「$\Diamond p$」の真理値をもとめることに他ならない．これを Kripke モデル流に解釈すると，到達可能な可能性世界が F で，p を真とする可能性世界が A である場合の $\Diamond p$ を求めることに対応する

といえるだろう．ただし，ここで，F, A は共に，ファジィ集合であるから，式 (4.41) はそのままは使えない．そこで，$\Diamond p$ の真理値は $U_p \cap U_u$ が要素を持つとどの程度いえるかという度合いであると解釈すれば，

$$v(\Diamond p, u) \equiv \bigvee_w \{\mu_{U_p}(w) \wedge \mu_{U_u}(w)\} \tag{5.16}$$

と式 (4.41) をファジィ的に拡張可能である（式 (5.16) はクリスプな場合，式 (5.14) と同値になる.）．ここで，式 (5.16) に $p = (X \text{ is } A), U_p = A, U_u = F$ を代入すれば，

$$v(\Diamond(X \text{ is } A), u) = \bigvee_w \{\mu_A(w) \wedge \mu_F(w)\} \tag{5.17}$$

が得られるが，これは，式 (5.8) の可能性測度 $\Pi_F(A)$ と一致する．つまり,「X is F」のとき「X is A」の可能性とは，到達可能な可能性世界が F であるときの「(X is A) が可能」の真理値である．ただし，ここで，式 (5.17) の u，つまり，現在の可能性世界が何であるかについては，具体的にわからないことに注意する．可能性を知るには現在の可能性世界がわかっていなくても，現在の可能性世界から到達可能な可能性世界の集合がわかっていればよいからである．

Kripke モデルと必然性測度

可能性測度と同様の考察をすると,「X is F」であるとき「X is A」である必然性は，到達可能な可能性世界が F であるときの「(X is A) が必然」の真理値となるだろう．ここで，Kripke モデルにおける必然命題真理値の定義は式 (4.40) のように与えられたが，これも到達可能世界であってしかも p が真ではない可能性世界つまり，$U_u \cap \mathrm{not}(U_p)$ がどの程度ないといえるかという程度を表していると解釈すれば,

$$v(\Box p, u) \equiv \sim \bigvee_w \{\mu_{\mathrm{not}(U_p)}(w) \wedge \mu_{U_u}(w)\} \tag{5.18}$$

と定義できるだろう．ここで $\sim X = 1 - X$ とすれば，式 (5.16) はさらに,

$$v(\Box p, u) \equiv 1 - \bigvee_w \{(1 - \mu_{U_p}(w)) \wedge \mu_{U_u}(w)\} \bigwedge_w \{\mu_{U_p}(w) \vee (1 - \mu_{U_u}(w))\} \tag{5.19}$$

となる．もちろん式 (5.19) はクリスプな場合，式 (4.40) に一致する．ここで，式 (5.19) に $p = (X \text{ is } A), U_p = A, U_u = F$ を代入すれば,

$$v(\Box(X \text{ is } A), u) = \bigwedge_w \{\mu_A(w) \vee (1 - \mu_F(w))\} \tag{5.20}$$

が得られ，これは式 (5.11) の $N_F(A)$ と一致する．

5.4　言語的真理値と可能性，必然性および区間真理値

本節では，タイプ 2 ファジィ集合の真理値である言語的真理値と可能性，必然性の関係および，それらと，言語的真理値の特別な場合であるところの区間真理値の関係について考察する．

言語的真理値と可能性，必然性

前節では「X is F」であるとき「X is A」なる可能性と必然性を求める方法について説明した．一方，第 1 章では,「X is F」であるときに「X is A」なる命題の言語的真理値を求める方法（逆

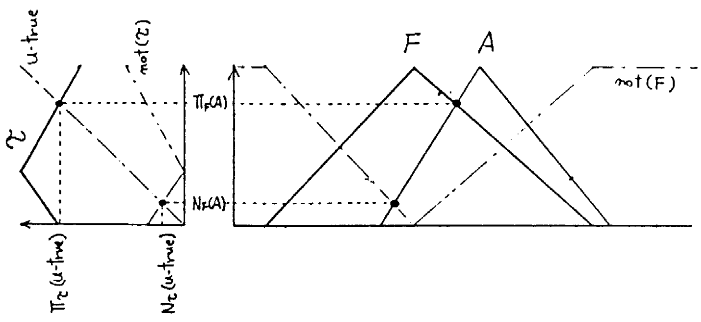

図 5.7　　言語的真理値と可能性，必然性の関係

真理値限定）について説明した．ではこの可能性，必然性と言語的真理値にはどんな関係があるだろうか．

ここで，図 5.7 のような具体的なファジィ集合の例 F および A を考える．このとき，第 1 章で述べた逆真理値限定法を用いれば,「X is F」であるとき,「X is A」の言語的真理値 τ は,

$$\mu_\tau(v) = \sup_{v=\mu_A(u)} \{\mu_F(u)\} \tag{5.21}$$

と求められ，図 5.7 の左側に示すようなメンバシップ関数が得られる．

一方，5.2 節の議論によれば，式 (5.8) および式 (5.11) より,「X is F」であるときの,「X is A」の可能性 $\Pi_F(A)$ および必然性 $N_F(A)$ も

$$\Pi_F(A) = \bigvee_u \{\mu_F(u) \wedge \mu_A(u)\} \tag{5.22}$$

$$N_F(A) = \bigwedge_u \{(1 - \mu_F(u)) \vee \mu_A(u)\} \tag{5.23}$$

と求められ，図 5.7 中に示すような結果が得られる．

ここで，図 5.7 の左側の図において，求められた $\tau, \Pi_F(A)$ および $N_F(A)$ の関係に着目する．すると，$\Pi_F(A)$ のところで τ と u-true が交点を持ち，また一方，$N_F(A)$ のところで τ の否定 not(τ) と u-true が交点を持っているのがわかる．図からみてわかるように，これは即ち,

$$\Pi_F(A) = \Pi_\tau(u\text{-true}) \tag{5.24}$$

$$N_F(A) = N_\tau(u\text{-true}) \tag{5.25}$$

であることを示している．もちろん，$\Pi_F(u\text{-true})$ は真理値 τ であるとき，これが u-true である可能性であり，また，$N_\tau(u\text{-true})$ は真理値が τ であるとき，これが u-true である必然性である．即ち，u-true のメンバシップ関数が,

$$\mu_{u\text{-true}}(v) = v \tag{5.26}$$

であることに注意すれば,

$$\Pi_\tau(u\text{-ture}) = \bigvee_v \{\mu_\tau(v) \wedge v\} \tag{5.27}$$

$$N_\tau(u\text{-true}) = \bigwedge_v \{(1 - \mu_\tau(v)) \vee v\} \tag{5.28}$$

である．

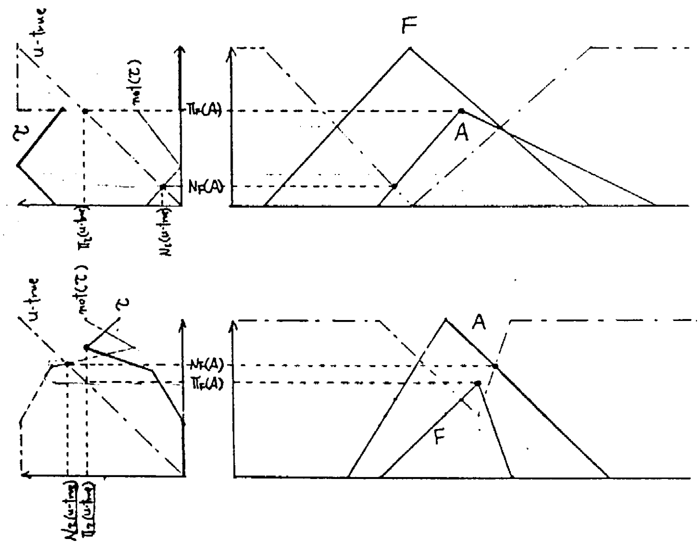

図 5.8　言語的真理値と可能性，必然性の関係（正規でない場合）

ここで，式 (5.21) を式 (5.27) に代入すれば，

$$
\begin{aligned}
\Pi_\tau(u\text{-true}) &= \bigvee_v \{ \sup_{v=\mu_A(u)} \{\mu_F(u)\} \wedge v\} \\
&= \bigvee_v \{ \sup_{v=\mu_A(u)} \{\mu_F(u) \wedge v\}\} \\
&= \sup_u \{\mu_F(u) \wedge \mu_A(u)\} \qquad (5.29)
\end{aligned}
$$

となり，$\Pi_\tau(u\text{-true})$ が，式 (5.22) の $\Pi_F(A)$ と一致することが確かめられる．

また，式 (5.21) を式 (5.28) に代入すれば，

$$
\begin{aligned}
N_\tau(u\text{-true}) &= \bigwedge_v \{(1 - \sup_{v=\mu_A(u)} \{\mu_F(u)\}) \vee v\} \\
&= \bigwedge_v \{ \inf_{v=\mu_A(u)} \{1 - \mu_F(u)\} \vee v\} \\
&= \bigwedge_v \{ \inf_{v=\mu_A(u)} \{(1 - \mu_F(u)) \vee v\}\} \\
&= \inf_u \{(1 - \mu_F(u)) \vee \mu_A(u)\} \qquad (5.30)
\end{aligned}
$$

となり，$N_\tau(u\text{-true})$ が，式 (5.23) の $N_F(A)$ と一致することも確かめられる．

このように，「X is F」のとき「X is A」である可能性と必然性は，「X is F」のときの「X is A」の言語的真理値が u-true である可能性と必然性に一致することを表してる．

このことは，F や A が正規ではない場合にも成立する．例えば，図 5.8 の上図は A が正規でない場合の例，また下図は F が正規でない場合の例を示している．それぞれ，このような場合でも，式 (5.24) および式 (5.25) が成立しているのがわかる．

ところで，図 5.8 の場合は言語的真理値 τ が正規でなくなっている．また可能性と必然性の関係が，

$$
N_F(A) = N_\tau(u\text{-true}) > \Pi_F(A) = \Pi_\tau(u\text{-true}) \qquad (5.31)
$$

となっており，必然性が可能性より高いという逆転現象が起きている．このような正規でないファジィ真理値や可能性と必然性の逆転現象は「矛盾」の概念と非常に関係が深いと予想される．この矛盾の概念については，まだ，ファジィ理論のなかで十分解明されていない段階であるが，第 6 章

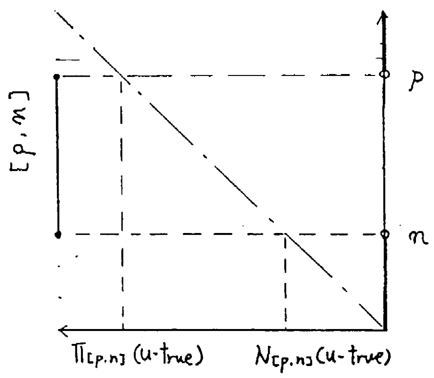

図 5.9　区間真理値の必然性真理値，可能性真理値の解釈

で紹介するファジィ・インターバル論理はこの問題に対する一つのアプローチを与えているので参照されたい．

可能性，必然性と区間真理値

言語的真理値（ファジィ真理値）の特別な場合として，真理値自体がファジィ集合の特別の集合であるクリスプ集合となっている場合，これを区間真理値という．例えば図 5.9 に示したものである．区間真理値は $[0,1]$ 上の区間集合として，$[n,p]$ と表される．ここで，通常，区間真理値の下限 n は必然性真理値，また上限 p は可能性真理値と呼ばれる．ここで，

$$0 \le n \le p \le 1 \tag{5.32}$$

である．

この区間真理値は，真理値が集合となっているから当然タイプ 2 ファジィ集合の真理値あるいはグレードとみなされる．ここで，$n = p$ の場合は，区間真理値の特別の場合として $[0,1]$ 上の数値的真理値，即ち，無限値論理の真理値となる．

区間真理値の特徴は,「無知」の概念を取り扱うことが可能な最も単純な真理値モデルだということであり，実用上の価値は非常に高い．区間真理値の意味するところは，無限値論理のように真理値が確定しておらず，ある範囲内にあることだけがわかっているということである．その区間内のどの真理値にでもなりうるのだが，そのどれなのかはわからないという，いわゆる「部分的無知」の概念を含んでいる．ここで，特別な区間真理値 $[0,1]$ は真理値のどれなのか全く特定できないことを表すから「完全な無知」を表す．

ここで，n を必然性真理値，p を可能性真理値と呼ぶのは，区間真理値 $[n,p]$ が真理値として，必然的に n 以上は真といえて，p まで真ということが可能だということを意味しているからと捉えるのが一般的である．しかし，図 5.9 に見るように

$$p = \Pi_{[n,p]}(u\text{-true}) \tag{5.33}$$

$$n = N_{[n,p]}(u\text{-true}) \tag{5.34}$$

つまり，p が「真理値 $[n,p]$ であるときに，その真理値が u-true である可能性」，n が「真理値が $[n,p]$ であるときに，その真理値が u-true である必然性」をそれぞれ与えているからであると考えるともっとすっきりする．

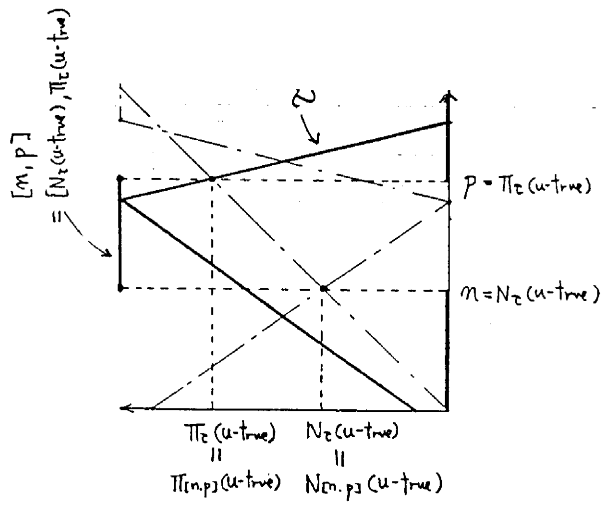

図 5.10　区間真理値による言語的真理値の近似

区間的真理値と言語的真理値

いま，図 5.10 のような言語的真理値 τ が与えられたものとする．ここで，真理値が τ であるときに，それが u-true である可能性と必然性は $\Pi_\tau(u\text{-true})$ および $N_\tau(u\text{-true})$ であった．一方，区間真理値 $[n,p]$ を考えると，真理値が $[n,p]$ であるときに，それが u-true である可能性と必然性は p および n であった．そこで，これらの可能性，必然性が一致するように区間真理値 $[n,p]$ を決めるとこれは，区間真理値 $[N_\tau(u\text{-true}), \Pi_\tau(u\text{-true})]$ となる．これを図示すると図 5.10 のようになり，もとの言語的真理値 τ のよい近似を与えているのがわかる．

ところで，先に考察したように,「X is F」のときの「X is A」の言語的真理値を τ とすれば,「X is F」のとき,「X is A」である可能性と必然性，即ち，$\Pi_F(A)$ と $N_F(A)$ はそれぞれ，$\Pi_\tau(u\text{-true})$ および $N_\tau(u\text{-true})$ に一致した．ここで，図 5.10 においてみたように，区間真理値 $[N_\tau(u\text{-true}), \Pi_\tau(u\text{-true})]$ は τ のよい近似になっているから，これは即ち，$[N_F(A), \Pi_F(A)]$ が τ のよい近似を与えることを意味する．結局，第 1 章で述べた逆真理値限定によって言語的真理値 τ を求めるかわりに，可能性測度，必然性測度により，区間真理値 $[N_F(A), \Pi_F(A)]$ を求めると，これは近似的な意味で,「X is A」を限定する真理値として意味があることがわかる．事実，一般に，可能性測度，必然性測度の計算量は逆真理値限定の計算量にくらべて格段に少ないので，このような近似的な限定真理値を求めることは応用上非常に有効であると思われる．

なお，塚本によって提案された数値的真理値限定は，さらに上の近似を粗くして，$N_F(A)$ と $\Pi_F(A)$ の平均を数値的真理値として求め，これを限定真理値としたことに対応する．

5.5　ファジィ数の大小の比較

Dubois と Prade は可能性と必然性の観点から，ファジィ数の大小比較に関する指標を導入した．ファジィ数の大小の比較は応用面でも重要なので，本節ではこれを概観する．

まず，ファジィ数の比較の前に，図 5.11 の一番上に示す一つのファジィ数 N を考え，ここで，N 以下の数，N 以上の数，N より大きい数，N より小さい数がどのようなファジィ数として与えられるかを考える．

N 以下の数は,「ファジィ数 N より可能的に等しいか小さいファジィ数」と考え，$(-\infty, N]$ と表

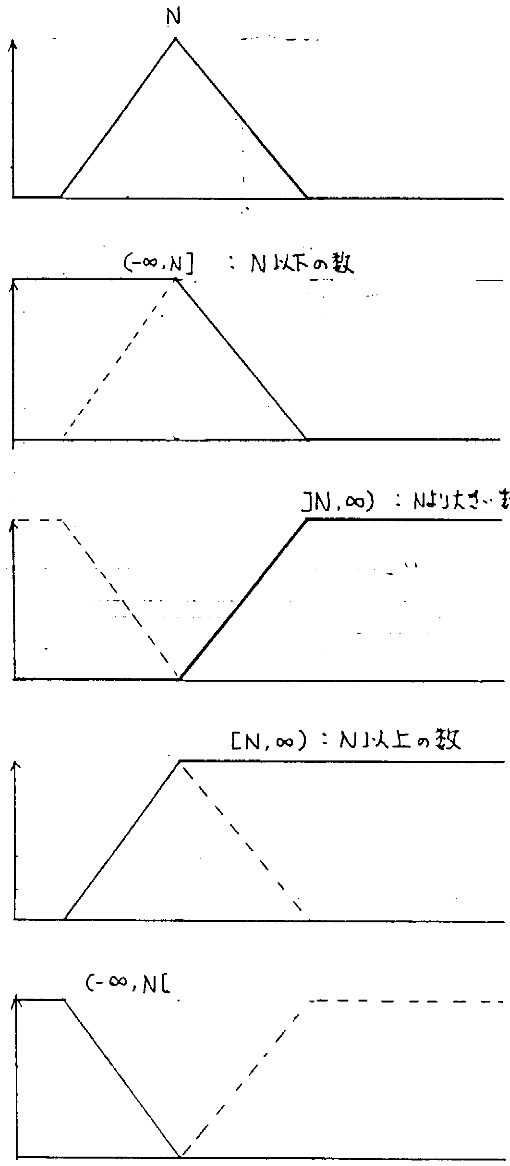

図 5.11　ファジィ数 N に対する大小の概念

し，そのメンバシップ関数は

$$\mu_{(-\infty,N]}(U) = \Pi_N([u,\infty)) \tag{5.35}$$

と定義される．つまり，u が N 以下の数であるといえる度合いは，u が N であるとしたときに，u が u 自身以上の集合に含まれている可能性に等しいと定義したことになる．これは，もし，u が N 以下の数ならば，u が N であると仮定したとき，その仮定が，u の可能性分布を実際の u よりも小さいほうに引き下げることはないから，u が「実際の u 自身以上の集合」に含まれる可能性が高くなることに関係している．これを，図で表せば，図 5.11 の 2 段目の図となる．

N より大きい数は,「ファジィ数 N より必然的に大きいファジィ数」と考え，$]N,\infty)$ と表す．これは，N 以下の数の否定の概念であるから，式 (5.35) の否定をとればよい．これを図で表せば，図 5.11 の 3 段目の図となる．

N 以上の数は,「ファジィ数 N より可能的に等しいか大きいファジィ数」と考え，$[N,\infty)$ と表

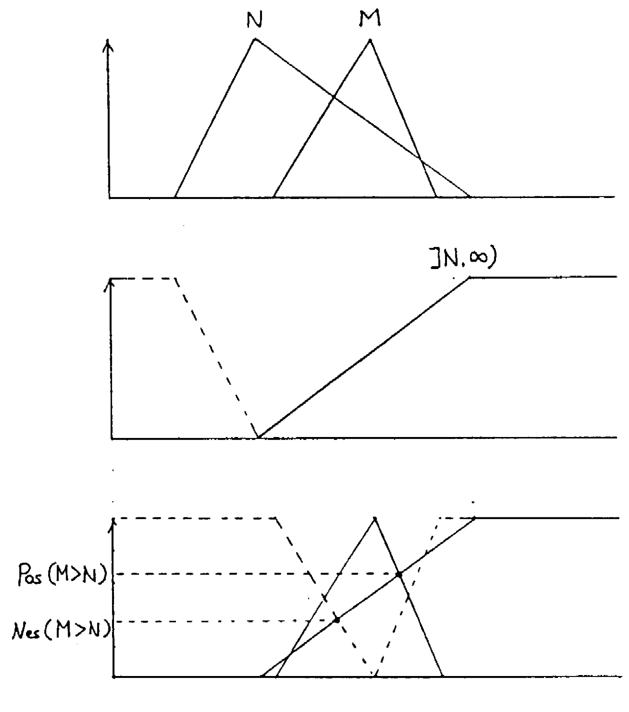

図 5.12　$M > N$ の可能性と必然性

し，そのメンバシップ関数は

$$\mu_{[N,\infty)}(u) = \Pi_N((-\infty, u]) \tag{5.36}$$

と N 以下の数の場合と同様な議論により定義される．これを図に示せば，図 5.11 の 4 段目の図が得られる．

N より小さい数は,「ファジィ数 N より必然的に小さいファジィ数」と考え，$(-\infty, N[$ と表す．これは，N 以上の数の否定の概念であるから，式 (5.36) の否定をとればよい．これを図で表せば，図 5.11 の 5 段目の図となる．

次に，二つのファジィ数 M と N の比較について考える．ここで，図 5.12 の M と N を例にとり，$M > N$ であるかどうかを調べる．このための指標として，$M > N$ である可能性 $\mathrm{Pos}(M > N)$，必然性 $\mathrm{Nes}(M > N)$ が次のように，定義される．

$$\mathrm{Pos}(M > N) = \Pi_M(]N, \infty)) \tag{5.37}$$

$$\mathrm{Nes}(M > N) = N_M(]N, \infty)) \tag{5.38}$$

これらは,「$M > N$ である可能性，必然性」をそれぞれ,「M であるとき，これが N より大きい数である可能性，必然性」と定義したことに他ならない．図 5.12 の例で下段の図のような可能性，必然性が得られる．

同様にして，$M < N, M \geq N, M \leq N$ の可能性，必然性も定義されることは容易に想像がつくであろう．

ここで，一般に，$\mathrm{Pos}(M > N) = \mathrm{Pos}(M < N)$ などの関係が成立しないことに注意する必要がある．

第6章　ファジィ・インターバル論理[10]

前章では，言語的真理値の近似として，区間真理値を用いることが応用上有効なことを示した．ここで，区間的真理値は真理値に関する中間的な判断が表せるだけではなく，真理値に対する部分定無知を表現できるのが特徴であった．しかし，ここで，区間真理値はその定義から，真理値上における正規なクリスプ集合しか扱えなかった．したがって，区間真理値は正規でない言語的真理値のよい近似を与えることができない．ところで，正規でない言語的真理値は真理値に「矛盾」を含んでいることを表現していると考えられることから，これは即ち，区間真理値は矛盾を含んだ真理値を扱えないことを意味する．また，この事実は，必然性真理値 n が可能性真理値 p より大きくなった場合（つまりこれも矛盾があることを意味する）に区間真理値が定義できないことからもうかがえる．

ところで，最近，ファジィ・インターバル論理という新しい論理が提案された．このファジィ・インターバル論理の真理値モデルは，区間真理値を特別な場合として含み，その上さらに，正規でない真理値を表現できる特徴がある．これは，区間真理値の拡張として,「無知」の他に「矛盾」の概念をも表現できる真理値モデルが提案されたことを意味する．この真理値モデルは応用上，区間真理値よりさらに有効な真理値モデルとして興味深い性質も持つので本章でこれを紹介，考察する．

6.1　ファジィ・インターバル (FI) 論理の定義

ファジィ・インターバル（以後 FI と略す）論理における真理値モデル（以後 FI 真理値と呼ぶ）は区間真理値と同様に，必然性真理値 n と可能性真理値 p のペアによって決定され，$[n,p]$ と表現される．ただしここで，n と p に関する条件は，

$$0 \le n \le 1,\ \ 0 \le p \le 1 \tag{6.1}$$

だけであり，$n \le p$ 以下である必要はなく，$n > p$ であってもよいところが区間真理値とは違うところである．

ここで，FI 真理値 $[n,p]$ のメンバシップ関数は，

$$\mu_{[n,p]}(v) = \begin{cases} 1 \wedge (1-n+p) & (n \le v \le p \ \ \text{or} \ \ p \le v \le n) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{6.2}$$

と定義される．このメンバシップ関数の例を示すと図 6.1 のようになる．$n \le p$ の場合は，結果的に通常の区間真理値と一致する（図 6.1 の上図）が，一方，$n > p$ の場合は図 6.1 の下図に示すように，正規でないファジィ集合となる．つまり，$n > p$ の場合は，区間真理値 $[n,p]$ の高さを $n-p$ だけ下げた形になる．

図 6.1 の下図の FI 真理値は，p から n までの間の真理値のどれかをとる可能性は $1-n+p$ 程度あるが，しかしどれ一つとして，完全に（程度 1 で）真理値となりうるものはないことを示している．これは，真理値としてどれも選択できないことを表しており,「部分的矛盾」を表していると考えられる．またこれは，FI の極端な場合，即ち，$[1,0]$ を考えるともっとはっきりする．$[1,0]$ のメンバシップ関数は式 (6.2) の定義に従えば，すべての真理値でグレードが 0 となる．これは真理値

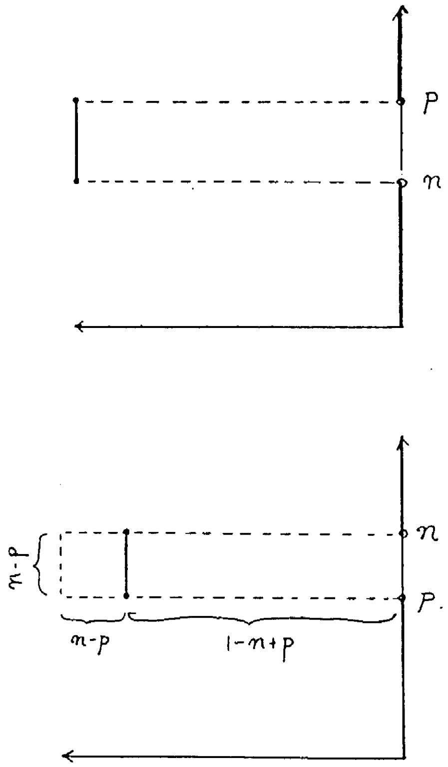

図 6.1　FI 真理値のメンバシップ関数の例

として，どれも全く選びようがないことを，つまり，真偽を定めることが全く意味がないことを表現している．

このように，式 (6.2) で定義された FI 真理値のメンバシップ関数は，$n \leq p$ では区間真理値に一致し，$n > p$ という矛盾を含む局面では，正規でないファジィ真理値を与えるという意味で受け入れることはできる．しかし，なぜ図 6.1 の定義を行うかという積極的な根拠は論文 [10] でも明らかにされていない．また論文の筆者に，直接問い合わせたところでも，FI 真理値のメンバシップ関数の定義を図 6.1 とする必然性は無いとのことであった．また，区間真理値の n, p の場合は，式 (5.33), 式 (5.34) のような意味があったが，FI 真理値の n, p ではそのような意味づけが必ずしもできないという問題もある．したがって式 (6.2) のメンバシップ関数の定義については，今後，議論を詰める余地があるように思われる．ただここで，一つ興味深いのは FI 真理値の高さが，$1 \wedge (1 - n + p)$ つまり，Lukasiewicz 含意によるところの $n \to p$（必然ならば可能）の真理値になっているところである．

6.2　FI 真理値における二つの半順序関係：「真偽」と「曖昧さ」

前節で，FI 真理値が導入され，そのメンバシップが定義されたが，そのメンバシップ関数の定義自体については，議論の余地がありそうであった．しかし，ここで，メンバシップ関数の定義はさておき，FI 真理値の代数的構造には非常に興味深いものがあるので，本節ではこれについて考察する．

いま，$X = [x_n, x_p], Y = [y_n, y_p]$ を FI 真理値の任意の 2 要素とすると，FI における 2 種類の半順序関係が定義される．

真偽の半順序関係

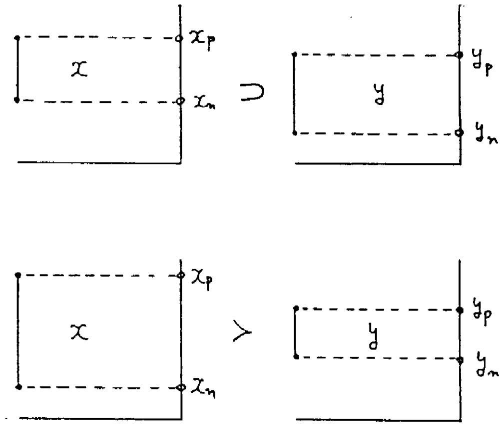

図 6.2　FI 真理値の 2 種類の半順序関係の例

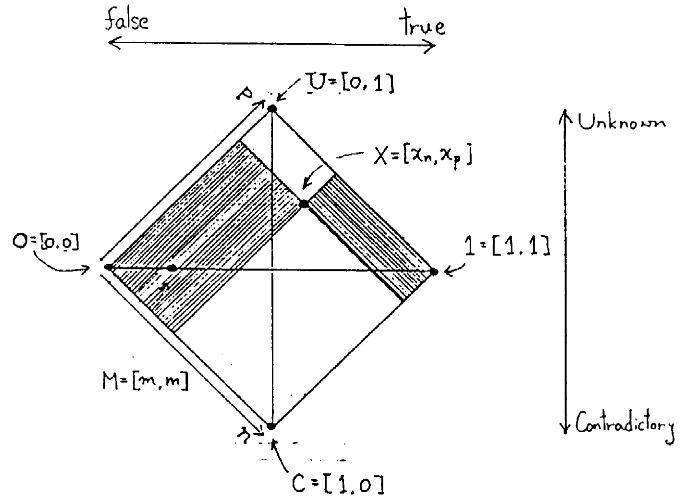

図 6.3　FI 真理値の $p-n$ 平面上での表現

$x_n \geq y_n$ かつ $x_p \geq y_p$ のとき，X と Y には真偽の半順序関係 $X \supset Y$ がある．

曖昧さの半順序関係

$x_n \leq y_n$ かつ $x_p \geq y_p$ のとき，X と Y には曖昧さの半順序関係 $X \succ Y$ がある．

このように定義された 2 種類の半順序関係の典型的な例を図 6.2 に示す．

ここで，FI 真理値の任意の 2 種類間には必ず，真偽の半順序関係か，曖昧さの半順序関係のどちらかの半順序関係が存在することは定義から容易にわかる．

ところで，FI 真理値は n, p のペアによって決定されるから，図 6.3 のような正方形の 1 点と考えてよい．ここで，$0 \equiv [0,0]$（完全な偽），$1 \equiv [1,1]$（完全な真），$U \equiv [0,1]$（完全な無知），$C \equiv [1,0]$（完全な矛盾）はそれぞれ，図 6.3 の 4 隅の点となる．またここで，ある FI 真理値 $X = [x_n, x_p]$ と真偽の半順序関係にある FI 真理値の集合は図 6.3 の斜線を施した部分となり，曖昧さの半順序関係にある FI 真理値の集合は白く残した部分となる．さらに，通常の区間真理値の集合は，0 と 1 を結んだ線より上の部分となり，無限値論理の真理値（数値的論理値）の集合は 0 と 1 を結んだ線に対応している．

ここで，FI 真理値の 2 種類の半順序関係に基づいて，2 組の否定，積演算，和演算が定義され

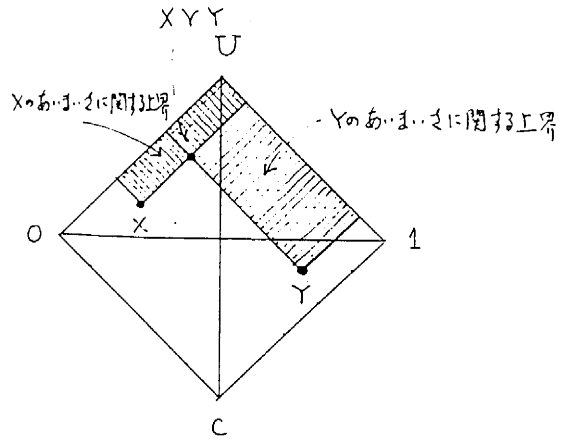

図 6.4　曖昧積の例

る．即ち，真偽値の半順序関係に基づいて，論理演算，

$$X \vee Y \equiv [x_n \vee y_n, x_p \vee y_p] \qquad \text{（論理和）}$$
$$X \wedge Y \equiv [x_n \wedge y_n, x_p \wedge y_p] \qquad \text{（論理積）}$$
$$\neg X \equiv [1 - x_p, 1 - x_n] \qquad \text{（論理否定）}$$

が定義され，また曖昧さの半順序関係に基づいて，曖昧演算，

$$X \curlyvee Y \equiv [x_n \wedge y_n, x_p \vee y_p] \qquad \text{（曖昧和）}$$
$$X \curlywedge Y \equiv [x_n \vee y_n, x_p \wedge y_p] \qquad \text{（曖昧積）}$$
$$\sim X \equiv [x_p, x_n] \qquad \text{（曖昧否定）}$$

が定義される（ここで，FI 論理の論理否定，曖昧否定の記号として，$\neg$ と $\sim$ を用いているが，これは，第 4 章で定義した偽否定 $\sim$ と直観主義否定 $\neg$ とは関係がないことに注意）．

これを図示すれば，例えば，X と Y および $X \curlyvee Y$ の関係は図 6.4 のようになる．これを同図上で解説すれば，X の曖昧さの半順序関係に基づく上界と，Y の曖昧さの半順序関係に基づく上界の共通部分，つまり X と Y の共通上界の下限として得られているのがわかる．同様にして，他の例を図示すると，例えば，図 6.5 のような関係となっている．

この FI 真理値の集合は，このように二つの半順序関係が組み合わさった構造を持っているが，実は二つの半順序関係がそれぞれ，完備束の特別な場合であるド・モルガン代数となっていることは，それぞれが，無限値論理の真理値の集合と同型をしていることから容易に導かれる．このような代数的な構造を持つことから，FI 論理では論理演算が容易に定義され，その代数的な構造が束にすらならない一般の言語的真理値に較べ，応用上の取扱いが格段に楽になる．またその一方では，FI 真理値は「無知」や「矛盾」の概念を表すことができる，表現力の豊かな真理値モデルとなっている．このことから，FI 論理は応用上非常に強力な道具となると期待されている．

6.3　FI 論理の量子化定理

FI 論理のもう一つのおもしろい性質として，FI 論理が基本的に 4 値に量子化されるということが証明されている．

FI 論理では，U と C を結ぶ直線上の一つの FI 真理値 $\alpha = [1 - \alpha_p, \alpha_p]$ を考えたとき，任意の

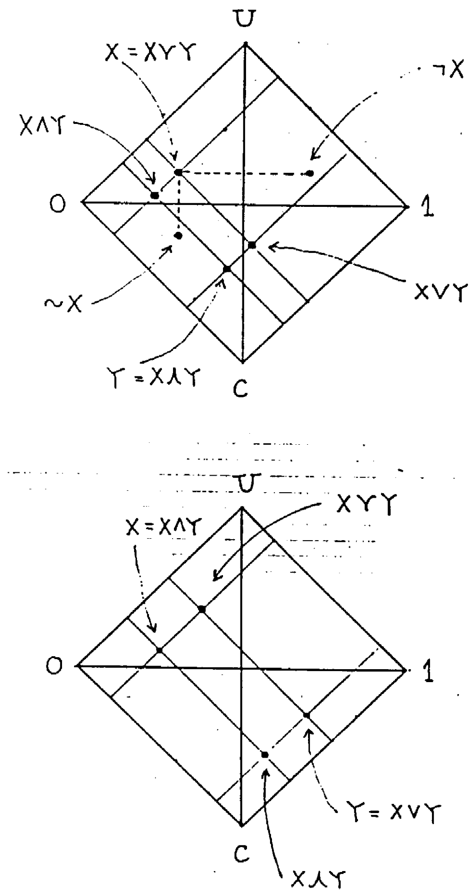

図 6.5　FI 論理演算の例

FI 真理値 $X = [x_n, x_p]$ に対する，次のような X^α を X を α で量子化した値として定義する．

$$X^\alpha = \begin{cases} 1 & (x_p \geq \alpha_p \text{ かつ } x_n > 1 - \alpha_p) \\ 0 & (x_p < \alpha_p \text{ かつ } x_n \leq 1 - \alpha_p) \\ U & (x_p \geq \alpha_p \text{ かつ } x_n \leq 1 - \alpha_p) \\ C & (x_p < \alpha_p \text{ かつ } x_n > 1 - \alpha_p) \end{cases} \tag{6.3}$$

これを図 6.6 上でみると，X^α は X を α によって $1, 0, U, C$ の 4 つのどれかにカテゴリ分けしたことになる．このような量子化定理を用いると，任意の FI 論理上の論理演算結果の α による量子化は，論理演算される前の入力をそれぞれ
の量子化したものの論理演算に等しくなる．即ち例えば,

$$(X \wedge Y)^\alpha = X^\alpha \wedge Y^\alpha \tag{6.4}$$

などが成立することを示している．これは，タイプ 1 ファジィ集合を α カットすることにより，真理値が 1 と 0 の 2 値に量子化されたことに対応する概念であると考えられる．

さらに次のような解釈も可能であろう．つまり，x_n は「真である必然性が x_n である」ことを表していると考えられるが，これは必然性と可能性の様相性から,「真ではない（偽である）可能性が $1 - x_n$ である」ことを表しているとも解釈される．もちろん「真である可能性は x_p である」から，これらから FI 真理値 $[x_n, x_p]$ は { 偽である可能性, 真である可能性 } を台集合とするファジィ集合として図 6.7 の上図のように表せるであろう．ここで，式 (6.3) の量子化はこのファジィ集合を α_p によって α カットして，図 6.7 の下図の 4 パターンのどれかに分類したことにあたる．ここ

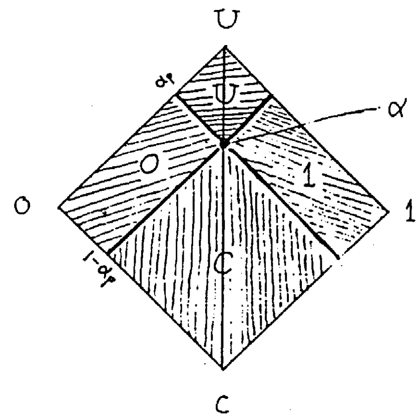

図 6.6　FI 真理値の量子化

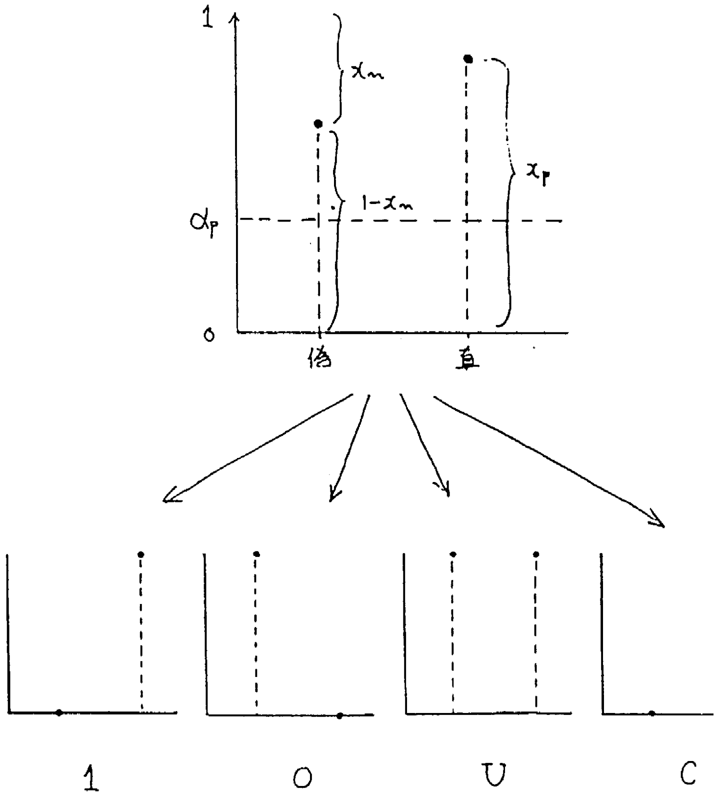

図 6.7　FI 真理値の量子化の α カットによる解釈

で，図 6.7 の下図の 4 パターンは，確かに，それぞれ，1 は真である可能性しかない，0 は偽である可能性しかない，U は真である可能性もあるし偽である可能性もある（つまり，わからないから無知），C は真である可能性も偽である可能性もない（つまり，真偽の決定のしようがないから矛盾）を表しているから，内容的にも頷ける．

FI 論理に関しては，まだ発表されたばかりであり，十分な研究がしつくされていないが，このように基本的に 4 値である論理ファジィ理論を効果的に応用に用いる場合に非常に重要な基本的アイディアを与えていると考えられる．

結言

本報告書の各章を概括すると次のようになる．

第 1 章

限定命題の第一として逆真理値限定問題について概説した．この逆真理値命題は，言語的真理値によって限定されたファジィ命題の標準形を求める真理値限定問題のちょうど逆の過程であり，標準形のファジィ命題を仮定したときに別のファジィ命題を限定する言語的真理値を求める手法であった．ここで，一般に逆真理値限定によって求められる真理値限定ファジィ命題は，もとの標準形ファジィ命題と一般には同値にはならず，もとの命題より曖昧さが少し広がった形で得られた．また，この逆真理値限定法は，とくに認識関係にファジィ理論を応用する場合に重要となる技術であることを示した．

第 2 章

限定命題の第二としてファジィ命題の可能性限定問題について概説した．これは，あるファジィ命題が「可能である」,「必然である」などの可能性に関係のある言葉で限定された場合に，これと同値なファジィ命題の標準形を求める問題であった．ここで，もとの可能性限定されるファジィ命題がタイプ 1 ファジィ集合によって表されているにもかかわらず，これと同値な標準形命題のファジィ集合は区間値グレードを持ち，タイプ 2 ファジィ集合の特別な場合となることを示した．また可能性限定法が様相理論と，直観主義論理の含意を用いても導出されることを示した．さらに，可能性限定によって，区間値真理値が導入されることは，部分的な無知の概念を導入したことになることを例に挙げて説明した．

第 3 章

限定命題の第三としてファジィ命題の確率限定問題について概説した．ここで，確率限定命題は等価な傾向命題に置き換えることができた．またその傾向命題はさらに，相対シグマカウントとファジィ限量作用素を用いた命題に置き換えられ，その真理値が数値的真理値として求められることを示した．また最後に確率限定法の意味を具体的な例を挙げて説明した．

第 4 章

ここでは，以下で，タイプ 2 ファジィ集合に関する性質をさらに深く考察するための準備として，ファジィ理論以外の論理体系とファジィ論理体系の関係について考察した．まず，一般的に真理地の集合の数学的な構造として，少なくとも完備束となることが重要であることを示した．次に各々の論理体系の真理値集合の代数的構造について概説した．古典論理は cBa なる代数構造を持つ真理値集合上での論理体系であり，2 値論理がその代表例であった．直観主義論理は cHa なる代数構造を持つ真理値集合上での論理体系であり，多値論理や無限値論理はその例となっていた．ま

たこれは，古典論理の一般化でもあった．古典論理の別の方向への一般化である様相論理は可能，必然などの様相概念を扱える論理であり，可能性世界を用いた Kripke モデルによってうまく説明されることを紹介した．最後にこれらの論理とファジィ論理の関係について考察した．ここで，古典論理は，ファジィ論理に限らず，他のすべての論理に関する議論の台となる論理として重要であることを示した．またグレードが $[0,1]$ の無限値論理となっているタイプ 1 ファジィ集合ではその元となる論理体系に直観主義論理の概念を導入することが不可欠であることを示した．また種々に提案されている含意についての古典論理，あるいは直観主義論理の立場からの解釈を試みた．さらにタイプ 2 ファジィ集合の真理値は様相性の概念と深く結びついていることを示唆した．

第 5 章

可能性，必然性を求める可能性速度と必然性測度がどのように定義されるか概説した．また可能性測度，必然性測度により可能性，必然性を測ることは，様相論理における Kripke のモデルに対応させて考えると，命題を真にする可能性世界と到達可能な可能性世界がわかっているときに，その命題の可能性限定と必然性限定の真理値を求めることに等しいことを考察した．次に逆真理値限定法によって得られる言語的真理値と可能性測度，必然性測度にはある関係があることを示した．さらに区間真理値と可能性，必然性の関係を考察し，可能性測度と必然性測度から求められる区間真理値が逆真理値限定法によって求められる言語的真理値のよい近似となることを考察により示した．最後に，ファジィ数の大小関係に関する指標が可能性測度と必然性測度を基に求められることを説明した．

第 6 章

ここでは，区間真理値の一般化として最近提案されたファジィ・インターバル (FI) 論理の真理値について概説した．この FI 真理値は，区間真理値では表し得なかった，正規でない言語的真理値，即ち，矛盾を含む真理値をも表現できる能力をもっているにもかかわらず，その代数的構造は 2 重のド・モルガン代数となっており，論理演算がうまく取り扱える真理値であった．また，FI 論理は基本的に真，偽，無知，矛盾の 4 値に量子化されることが示された．

本報告の内容によって，ファジィ理論を認識に用いる場合，タイプ 2 ファジィ集合を取り扱うことが不可欠であることがはっきりしてきた．また，この場合タイプ 2 ファジィ集合の一般的な真理値である言語的真理値をそのまま取り扱うのは困難であり，その代わり，FI 真理値のように，表現力と論理演算の容易さを両方兼ね備えた真理値モデルを利用することが望ましいと思われる．

参考文献

[1] 佐賀聡人：ソフトコンピューティング 講義資料 (I)

[2] 水本雅晴：ファジィ理論とその応用：サイエンス社 (1988)

[3] 坂和正敏：ファジィ理論の基礎と応用：森北出版 (1989)

[4] 別冊数理科学：ファジィ理論への道：サイエンス社 (1988)

[5] 数理科学：特集ファジィ理論と応用：サイエンス社，Vol.25，No.2(1987)

[6] 竹内外史：直観主義的世界論：紀ノ国屋書店 (1980)

[7] 竹内外史：数学的世界観：紀ノ国屋書店 (1982)

[8] G.E. ヒューズ，M.J. クレスウェル箸，三浦聡，大浜茂夫，春藤修二訳：様相論理入門：恒星社厚生閣 (1981)

[9] 田中英夫：ファジィ理論の過去・現在・未来：日本ファジィ学会誌，Vol.1，No.1，pp.48-62(1989)

[10] 向殿政男，菊池浩明：ファジィ・インターバル論理の提案：日本ファジィ学会誌，Vol.2，No.2，pp.97-110(1990)

[11] 村井哲也，宮腰政明，新保勝：ファジィ測度に基づく多重様相意味論の一構成：第 6 回ファジィシステムシンポジウム講演論文集，pp.67-pp.74(1991)

ソフトコンピューティング 講義資料（II）

2000 年　5 月　8 日　初版 第 1 刷発行
2000 年 12 月 18 日　初版 第 2 刷発行

著　者　佐賀 聡人
発行者　滝川 裕康
発行所　室蘭工業大学情報工学科佐賀研究室
http://hanasato.csse.muroran-it.ac.jp/